

# DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID

*Problema inverso de scattering para la ecuación de Schrödinger:*

*Reconstrucción parcial del potencial a partir de*

*datos de retrodispersión en 2D y 3D*

Memoria para optar al título de Doctor en Ciencias Matemáticas

presentada por

JUAN MANUEL REYES GONZÁLEZ

Dirigida por

Alberto Ruiz González

Madrid, J



540868317X

IMPRESO EN EL CENTRO DE INVESTIGACIONES  
MATEMÁTICAS DE LA UAM

**Als meus pares, perquè els estim**

## Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer sin duda ninguna a mis padres su amor y apoyo incondicional con los que he contado en este tránsito de mi vida y siempre. A ellos dedico esta tesis.

También deseo agradecer a mi director de tesis Alberto Ruiz todo lo que me ha enseñado. Las Matemáticas que sé hoy se las debo sobre todo a él. Gracias también por su inestimable paciencia, por haber creído en mí, por sus orientaciones y su ánimo.

Quiero dar las gracias a Juan Antonio Barceló por haberse atrevido a asumir la ingrata labor de leer y revisar esta memoria, y por sus valiosas sugerencias.

Gracias a todos los profesores de los cursos de doctorado que tuve y especialmente a Eugenio Hernández y a Gustavo Garrigós por su pedagogía y su paciencia con el interminable DEA que al final no fue interminable. A todos ellos les debo la otra parte de las Matemáticas que sé. También gracias a los miembros del Departamento a los que acudí para resolver alguna duda de Matemáticas y que tan bien me atendieron.

Mi gratitud también va dirigida a mis compañeros becarios del Departamento por propiciar un ambiente idóneo para trabajar, que valoramos entrañablemente los que venimos de fuera de Madrid. Gracias Ángel por haberme iniciado en el Latex.

Gracias a mis profesores de la UIB, Vicent Caselles (que actualmente trabaja en la Universidad Pompeu Fabra) y Bartomeu Coll por permitirme compartir mis pequeños logros con ellos a lo largo de esta etapa por correo electrónico y por sus palabras de ánimo.

Agradezco a mi profesor de Matemáticas de B.U.P. y C.O.U. del instituto Sant Josep Obrer de Palma de Mallorca, Miquel Siquier Capó, haber despertado mi interés por la Matemática desde muy joven.

Por último, quiero dar las gracias también a mi amigo José María Corró, por sus innumerables llamadas por teléfono desde la querida Mallorca tanto en momentos de duda como de satisfacción. Gràcies per s'amistat, Pep Maria!

Madrid, Julio de 2007

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. La ecuación de Helmholtz . . . . .	2
1.2. La resolvente del laplaciano . . . . .	5
1.2.1. Estimaciones para la resolvente . . . . .	7
1.3. El Problema Directo . . . . .	13
1.4. El Problema Inverso . . . . .	16
1.5. Contenido de la Tesis Doctoral . . . . .	20
<b>2. Dispersión doble y triple en 2d</b>	<b>27</b>
2.1. Ganancia de regularidad de $Q_2(q)$ respecto de $q$ . . . . .	27
2.1.1. Estimación del término esférico $Q(q)$ . . . . .	28
2.1.2. Estimación del término valor principal $P(q)$ . . . . .	33
2.1.3. Resultados clave . . . . .	44
2.2. Ganancia de regularidad de $Q_3(q)$ respecto de $q$ . . . . .	53
2.2.1. Estimación del término esférico $Q'(q)$ . . . . .	54
2.2.2. Estimación del término valor principal “mixto” $Q''(q)$ . . . . .	60
2.2.3. Resultados clave . . . . .	68
2.2.4. Prueba del lema 2.2.2 . . . . .	72
2.2.5. Esbozo de la demostración del lema 2.2.3 . . . . .	90
2.2.6. Ideas clave para controlar el término valor principal “puro” . . . . .	94
<b>3. Dispersión doble, triple y cuádruple en 3d</b>	<b>97</b>
3.1. Ganancia de regularidad de $Q_2(q)$ respecto de $q$ . . . . .	97
3.1.1. Estimación del término esférico $S(q)$ . . . . .	98
3.1.2. Estimación del término valor principal . . . . .	101
3.2. Ganancia de regularidad de $Q_3(q)$ respecto de $q$ . . . . .	102
3.2.1. Estimación del término esférico . . . . .	102
3.2.2. Estimación de los términos de valor principal . . . . .	110
3.3. Ganancia de regularidad de $Q_4(q)$ respecto de $q$ . . . . .	111
3.3.1. Estimación del término esférico $P'(q)$ . . . . .	111

3.4. Resultados clave en 3d . . . . .	131
<b>4. Prueba de los teoremas concluyentes</b>	<b>141</b>
4.1. Estimaciones de los términos j-ésimos . . . . .	141
4.2. Prueba de los teoremas 1.5.1 y 1.5.2 . . . . .	145
4.3. Comparación con el scattering inverso de ángulo fijo . . . . .	145
<b>Conclusiones y comentarios</b>	<b>148</b>
 <b>Apéndices</b>	 <b>151</b>
<b>A. Notación y definiciones</b>	<b>153</b>
<b>B. Algunos resultados</b>	<b>159</b>
<b>C. Reducción al caso <math>\alpha &lt; \frac{n}{2}</math> para <math>n = 2, 3</math></b>	<b>165</b>
C.1. Regla de Leibniz para la dispersión múltiple . . . . .	165
C.2. Ganancia de $\frac{1}{2}^-$ derivada para cualquier $\alpha \geq 0$ . . . . .	167
<b>D. Producto de espacios de Sobolev</b>	<b>181</b>
 <b>Bibliografía</b>	 <b>196</b>
 <b>Índice de Notación</b>	 <b>201</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Esta memoria constituye una contribución a la base matemática de la Tomografía de Difracción para el problema inverso de *backscattering*<sup>1</sup> para la ecuación de Schrödinger. De hecho, probaremos detalladamente que las singularidades del potencial  $q$  están contenidas en la aproximación de Born  $q_B$  en la escala de Sobolev Hilbertiana en dimensiones 2 y 3. En este sentido podemos afirmar que la Tomografía de Difracción es lo que en el contexto de la Geofísica se entiende como una esquema de migración para este problema (véase [B]).

La formulación matemática de este hecho viene dada por el siguiente teorema:

**Teorema 1.0.1.** *Sean  $n \in \{2, 3\}$ ,  $\alpha \geq 0$ , y  $q \in W^{\alpha,2}(\mathbb{R}^n)$  una función real de soporte compacto. Entonces, módulo una función  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , se cumple que  $q - q_B \in W^{\beta,2}(\mathbb{R}^n)$ , para todo  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que  $0 \leq \beta < \alpha + \frac{1}{2}$ .*

Queremos insistir en el hecho de que este resultado nos brinda la reconstrucción de las singularidades del potencial  $q$  a partir de la amplitud de *backscattering*. De hecho, si consideramos un potencial  $q$  cuyas singularidades formen una subvariedad de dimensión  $n-1$  (una hipersuperficie) de manera que  $q \in W^{\alpha,2}(\mathbb{R}^n)$  para cualquier  $\alpha < \frac{1}{2}$  pero  $q \notin W^{\frac{1}{2},2}(\mathbb{R}^n)$ , la ganancia de prácticamente media derivada de  $q - q_B$  respecto de  $q$  nos garantiza que  $q - q_B$  es una función continua. Y no hay que olvidar que la aproximación de Born  $q_B$  es conocida.

Para situarnos en el problema que nos ocupa haremos un breve recorrido por la ecuación de Helmholtz en la sección 1.1, puesto que el comportamiento asintótico de la solución del caso homogéneo en un dominio exterior tiene un papel relevante en el planteamiento del problema inverso.

Para tratar el problema inverso de *scattering*, las estimaciones de la resolvente del laplaciano que se han usado tradicionalmente han sido las de Agmon (véase [A]). Sin embargo, para el caso de potenciales en  $L^p$  o en clases peores, las estimaciones adecuadas son las

---

<sup>1</sup>El término *backscattering* puede traducirse del inglés como retrodispersión.

de los trabajos [KRS] o [RVe]. En la sección 1.2 se muestran las que necesitamos en esta memoria.

Para la presentación del problema inverso es imprescindible primero describir el problema directo, tarea que abordaremos en la sección 1.3. También definiremos un concepto clave en nuestro contexto: la serie de Neumann-Born de la amplitud de *scattering*.

En la sección 1.4 planteamos el problema inverso de *scattering*, describiendo los tipos de problemas más usuales e introducimos la serie de Neumann-Born de los datos de *backscattering*.

Por fin, en la sección 1.5 presentamos una descripción de los resultados obtenidos, marcando las líneas de trabajo que articulan esta memoria, así como una explicación de los contenidos de la misma.

**Constantes.** Empleamos la letra  $C$  para denotar una constante cualquiera que puede calcularse en términos de cantidades conocidas. El valor exacto de  $C$  puede entonces cambiar de una línea a otra en un cálculo dado. La ventaja es que nuestros cálculos presentan una apariencia más simple, puesto que continuamente absorbemos factores “extraños” en el término  $C$ .

## 1.1. La ecuación de Helmholtz

El mismo procedimiento para encontrar la solución fundamental del operador de Laplace en  $\mathbb{R}^n$ , puede usarse en el contexto de la ecuación de Helmholtz. Puesto que la solución fundamental con polo en el origen es singular en este punto, podemos usar coordenadas polares para buscar soluciones fuera del origen.

La ecuación de Helmholtz homogénea

$$(\Delta + k^2)\omega(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1.1)$$

tomando  $u(y) = \omega(y/k)$ , puede reducirse al caso  $k = 1$  para  $u$ .

Buscamos pues soluciones radiales de la ecuación de Helmholtz para  $k = 1$  con polo en el origen. Teniendo presente que el operador de Laplace en coordenadas polares se escribe  $\Delta u = u_{rr} + \frac{n-1}{r} u_r$ , esto nos conduce a ecuación diferencial ordinaria

$$u_{rr} + \frac{n-1}{r} u_r + u = 0. \quad (1.1.2)$$

El cambio  $u(r) = r^{-(n-2)/2} v(r)$  transforma (1.1.2) en la ecuación de Bessel de orden  $\lambda = (n-2)/2$ :

$$v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \left(1 - \frac{\lambda^2}{r^2}\right) v = 0.$$

Tomamos el conjunto fundamental de soluciones complejas conjugadas con polo en el origen conocidas como *funciones de Hankel*  $H_\lambda^{(1)}(r)$  y  $H_\lambda^{(2)}(r)$  de orden  $\lambda$  de primera y segunda especie respectivamente. Nótese que escogemos las funciones de Hankel en lugar de las funciones de Bessel como soluciones de la ecuación de Bessel, puesto que estamos interesados en soluciones con singularidad en el origen. Además, las funciones de Hankel satisfacen las *condiciones de radiación entrante y saliente en el infinito* (véanse (1.2.1) y (1.1.4)), propiedades que no tienen ni las funciones de Bessel ni las de Neumann.

A fin de tener la condición de radiación saliente nos quedamos con la función de Hankel de primera especie y obtenemos la solución radial de (1.1.1) normalizada con polo en el origen dada por

$$\phi(x) := C_n k^{(n-2)/2} \frac{H_{(n-2)/2}^{(1)}(k|x|)}{|x|^{(n-2)/2}}, \quad (1.1.3)$$

donde  $C_n = \frac{1}{2i(2\pi)^{(n-2)/2}}$ .

El método de desarrollo en series de potencias de la teoría de e.d.o. nos suministra el comportamiento asintótico en el origen de las funciones de Hankel de primera especie.

De hecho, las funciones de Hankel de primera especie satisfacen los siguientes cuatro resultados (véase [W]):

**Lema 1.1.1.** *Las funciones de Hankel de primera especie verifican*

$$\begin{aligned} H_\lambda^{(1)}(r) &= -\frac{i}{\pi} \Gamma(\lambda) \left(\frac{2}{r}\right)^\lambda, \quad \text{si } \lambda \neq 0, \\ H_0^{(1)}(r) &= \frac{2i}{\pi} \log r, \end{aligned}$$

cuando  $r \rightarrow 0$ , donde  $\Gamma(\lambda)$  denota la función Gamma.

**Lema 1.1.2.** *Se cumple*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} H_\lambda^{(1)}(r) &= H_{\lambda-1}^{(1)}(r) - \frac{\lambda}{r} H_\lambda^{(1)}(r), \\ H_{\lambda-1}^{(1)}(r) &= r^{-\lambda} \frac{d}{dr} \left( H_\lambda^{(1)}(r) r^{-\lambda} \right), \\ H_{-\lambda}^{(1)}(r) &= e^{i\lambda\pi} H_\lambda^{(1)}(r). \end{aligned}$$

A partir de los lemas 1.1.1 y 1.1.2 se obtiene el siguiente

**Lema 1.1.3.** *Sea  $r = |x|$ . Se verifica*

$$\frac{d\phi(x)}{dr} = \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} + O(r^{-n+2}),$$

si  $r \rightarrow 0$ , donde  $\omega_{n-1}$  denota la medida de la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^n$ .

Para obtener el comportamiento asintótico en el infinito de  $\phi(x)$  es necesario el siguiente lema.



**Lema 1.1.4.** Sea  $\lambda \geq 0$ . Se cumple

$$H_\lambda^{(1)}(r) = \left(\frac{2}{\pi r}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i(r - \frac{\lambda\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} + O(r^{-3/2}),$$

cuando  $r \rightarrow \infty$ .

Para ver la demostración de los tres resultados siguientes consúltese [CK1].

Los lemas 1.1.3 y 1.1.4 permiten demostrar la siguiente

**Proposición 1.1.1.** Permitamos el abuso de notación  $\phi(x, y) = \phi(x - y)$ . Esta función en la variable  $x$  es una solución fundamental con polo  $y$  de la ecuación de Helmholtz. Su comportamiento asintótico cuando  $r = |x - y| \rightarrow \infty$  viene dado por

$$\phi(x, y) = C_n k^{(n-1)/2} e^{ikr} r^{-(n-1)/2} e^{iky \cdot \frac{x}{r}} + O(r^{-n/2}).$$

Más aún,  $\phi(x, y)$  satisface la llamada condición de radiación de Sommerfeld saliente:

$$\frac{d}{dr} \phi(x, y) - ik\phi(x, y) = o(r^{-(n-1)/2}), \quad (1.1.4)$$

uniformemente para  $y$  en conjuntos compactos, cuando  $r = |x - y| \rightarrow \infty$ .

También introducimos el resultado análogo a la proposición 1.1.1 para la derivada normal de la solución fundamental.

**Proposición 1.1.2.** Sea  $D$  un dominio  $C^1$  y consideremos la derivada normal  $F(x, y) = \frac{\partial \phi(x, \cdot)}{\partial \nu}(y)$ . Entonces  $F$  es solución fundamental del operador de Helmholtz en  $\{x \neq y\}$ , cuyo comportamiento asintótico cuando  $|x| \rightarrow \infty$  viene dado por

$$C_n k^{(n-1)/2} e^{ik|x|} |x|^{-(n-1)/2} \frac{\partial}{\partial \nu_y} e^{iky \cdot \frac{x}{|x|}} + o(|x|^{-(n-1)/2}).$$

Además,  $F$  satisface la condición de radiación de Sommerfeld saliente uniformemente para  $y \in \partial D$ .

**Teorema 1.1.1.** Sea  $\Omega$  un dominio exterior, es decir, el complementario de un dominio acotado  $D$ . Supóngase que  $u$  es solución de la ecuación de Helmholtz homogénea en  $\Omega$  tal que  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  si  $\partial D \in C^1$  y  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  si  $\partial D \in C^2$ . En este último caso supondremos la existencia de la derivada normal como el siguiente límite para  $x \in \partial D$ :

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \nu(x) \cdot \nabla u(x - h\nu(x)),$$

uniformemente en  $\partial D$ , donde  $\nu(x)$  denota el vector normal unitario exterior a  $D$  en el punto  $x \in \partial D$ . Entonces las condiciones siguientes son equivalentes:

1. (Condición de radiación de Sommerfeld saliente)

$$\frac{\partial}{\partial r} u(x) - iku(x) = o(r^{-(n-1)/2}),$$

cuando  $r = |x| \rightarrow \infty$  uniformemente en  $\hat{x} = \frac{x}{r} \in S^{n-1}$ .

2. (Condición de radiación  $L^2$  saliente)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S(0,r)} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right|^2 d\sigma_r = 0.$$

3. (Fórmula de representación exterior). Para todo  $x \in \Omega$  se tiene

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \phi(x, \cdot)}{\partial \nu}(y) \right) d\sigma(y). \quad (1.1.5)$$

Como corolario de este teorema se puede demostrar el siguiente resultado, aplicando las expresiones asintóticas de la solución fundamental y su derivada normal dadas por las proposiciones 1.1.1 y 1.1.2 en la fórmula de representación (1.1.5).

**Corolario 1.1.** Sean  $u$  y  $\Omega$  como en el teorema 1.1.1, y supóngase que  $u$  satisface la condición de radiación de Sommerfeld saliente. Entonces

$$u(x) = C_n k^{(n-1)/2} \frac{e^{ik|x|}}{|x|^{(n-1)/2}} u_\infty(x/|x|) + o(|x|^{-(n-1)/2}),$$

cuando  $|x| \rightarrow \infty$ . La función  $u_\infty$  se conoce como campo lejano o amplitud de scattering de  $u$  y verifica

$$u_\infty(\hat{x}) = \int_{\partial\Omega} \left( u(y) \frac{\partial e^{iky \cdot \hat{x}}}{\partial \nu_y} - \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} e^{iky \cdot \hat{x}} \right) d\sigma(y),$$

donde  $\hat{x} = x/|x| \in S^{n-1}$ .

## 1.2. La resolvente del laplaciano

Sea  $\varepsilon \neq 0$ . La solución fundamental  $\phi_\varepsilon$  del operador de Helmholtz perturbado  $\Delta + k^2 + i\varepsilon$  satisface

$$\widehat{\phi}_\varepsilon(\xi) = (-|\xi|^2 + k^2 + i\varepsilon)^{-1}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

donde  $\widehat{\phi}_\varepsilon$  designa la transformada de Fourier de  $\phi_\varepsilon$ . Se puede demostrar que la distribución temperada  $(-|\xi|^2 + k^2 + i\varepsilon)^{-1}$  tiene límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  o  $\varepsilon \rightarrow 0^-$ . Estos límites se denotan por  $(-|\xi|^2 + k^2 + i0)^{-1}$  y  $(-|\xi|^2 + k^2 - i0)^{-1}$ , respectivamente. La transformada inversa de la primera distribución es la solución fundamental saliente  $\phi(x)$  del operador de Helmholtz. La transformada de Fourier inversa de la segunda es la solución fundamental entrante  $\phi_{ent}$  que satisface la llamada *condición de radiación de Sommerfeld entrante*

$$\frac{d}{dr} \phi_{ent}(x) + ik\phi_{ent}(x) = o(r^{-(n-1)/2}), \quad (1.2.1)$$

cuando  $r = |x| \rightarrow \infty$ , y que resulta de conjugar la condición (1.1.4) (con  $y = 0$ ).

Este hecho puede expresarse en el siguiente *principio de absorción en el límite*:

**Teorema 1.2.1.** *Supóngase que  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Sea  $u_\varepsilon$  la solución única del problema*

$$(\Delta + k^2 + i\varepsilon)u_\varepsilon = f,$$

*en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces*

$$u = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u_\varepsilon$$

*es solución saliente de la ecuación de Helmholtz, tomándose el límite en el sentido débil.*

Por tanto, la solución saliente de la ecuación en  $\mathbb{R}^n$

$$(\Delta + k^2)u = f$$

es la función

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y)f(y)dy,$$

donde  $\phi$  se define en (1.1.3) y además

$$\widehat{\phi}(\xi) = (-|\xi|^2 + k^2 + i0)^{-1}.$$

Se puede extender la fórmula de una variable

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (t + i\varepsilon)^{-1} = v.p. \frac{1}{t} + i\pi\delta,$$

a la expresión

$$(-|\xi|^2 + k^2 + i0)^{-1} = v.p. \frac{1}{-|\xi|^2 + k^2} + \frac{i\pi}{2k} d\sigma_k, \quad (1.2.2)$$

donde  $d\sigma_k$  es la medida inducida por la medida de Lebesgue  $n$ -dimensional sobre la esfera centrada en el origen y de radio  $k \in \mathbb{R}^+$  (véanse las pp. 209-236 en [GS] y el capítulo 3 de [Ru2]).

**Definición.** La *resolvente saliente del laplaciano*  $R_+(k^2)$  se define como el operador que tiene por multiplicador de Fourier asociado la distribución temperada  $(-|\xi|^2 + k^2 + i0)^{-1}$ . Dicho de otro modo, es el operador de convolución con la solución fundamental saliente de la ecuación de Helmholtz definida en (1.1.3). La *resolvente entrante del laplaciano*  $R_-(k^2)$  es el operador que tiene por multiplicador asociado  $(-|\xi|^2 + k^2 - i0)^{-1}$ .

A partir de (1.2.2) podemos escribir para  $x \in \mathbb{R}^n$ :

$$R_+(k^2)(f)(x) = v.p. \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \frac{\widehat{f}(\xi)}{-|\xi|^2 + k^2} d\xi + \frac{i\pi}{2k} \widehat{d\sigma_k} * f(x). \quad (1.2.3)$$

### 1.2.1. Estimaciones para la resolvente

Vamos a hacer un recorrido por las principales estimaciones que se conocen para la resolvente del laplaciano concluyendo en la estimación dada por la proposición 1.2.1 que va a desempeñar un papel crucial en el control del término  $j$ -ésimo de la serie de Neumann-Born para los datos de *backscattering*, como veremos en la sección 4.1.

En primer lugar, enunciamos la estimación de S. Agmon (véase [A]):

**Lema 1.2.1.** *Sea  $\gamma > \frac{1}{2}$ . Entonces se cumple*

$$\|R_+(k^2)(f)\|_{L^2_{-\gamma}} \leq C k^{-1} \|f\|_{L^2_\gamma},$$

para cierta constante  $C > 0$  independiente de  $k$  y  $f$ .

Agmon y L. Hörmander dieron una estimación mejor que ésta (véase [AH]):

$$\sup_{R>1} \left( \frac{1}{R} \int_{B_R} |R_+(k^2)f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C k^{-1} \sum_{j \geq 0} \left( 2^j \int_{B_{2^{j+1}} \setminus B_{2^j}} |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

C.E. Kenig, G. Ponce y L. Vega obtuvieron una estimación aún mejor que es invariante por dilataciones (véase [KPV1]):

$$\sup_{R, x_0} \left( \frac{1}{R} \int_{B(x_0, R)} |R_-(k^2)f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C k^{-1} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left( 2^j \int_{B_{2^{j+1}} \setminus B_{2^j}} |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

donde  $C$  es independiente de  $k$  y  $f$ .

Kenig, A. Ruiz y C.D. Sogge probaron la siguiente estimación autoadjunta (véase [KRS]):

**Lema 1.2.2.** *Sea  $r \in \mathbb{R}$  tal que o bien  $\frac{2}{n+1} \leq \frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \leq \frac{2}{n}$ , si  $n > 2$ , o bien  $\frac{2}{3} \leq \frac{1}{r'} - \frac{1}{r} < 1$ , si  $n = 2$ . Entonces*

$$\|R_+(k^2)(f)\|_{L^r} \leq C k^{n(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}) - 2} \|f\|_{L^{r'}}, \quad (1.2.4)$$

para cierta constante  $C > 0$  independiente de  $k$  y  $f$ .

Con el siguiente resultado semilocal, Ruiz y Vega consiguieron estimaciones lejos de la línea de dualidad  $(t, r)$  donde  $\frac{1}{t} + \frac{1}{r} = 1$  (véase [Rve]).

**Lema 1.2.3.** *Sean  $k > 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{n}$  y  $f \in L^t(\mathbb{R}^n)$ . Entonces existe una constante  $C > 0$  independiente de  $k$  y  $f$  tal que*

$$\sup_{R, x_0} \left( \frac{1}{R} \int_{B(x_0, R)} |R_-(k^2)(f)(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C k^{-3/2 + n(\frac{1}{t} - \frac{1}{2})} \|f\|_{L^t}.$$

De hecho, si  $\gamma > \frac{1}{2}$  se cumple

$$\|R_+(k^2)(f)\|_{L^2_{-\gamma}} \leq C k^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}} \|f\|_{L^t}, \quad (1.2.5)$$

$$\|R_+(k^2)(f)\|_{L^r} \leq C k^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}} \|f\|_{L^2_\gamma}, \quad (1.2.6)$$

donde  $\frac{1}{t} - \frac{1}{2} = \frac{1}{n+1}$ ,  $\frac{1}{2} - \frac{1}{r} = \frac{1}{n+1}$  y  $C$  no depende ni de  $k$  ni de  $f$ . Veámoslo. Para  $\gamma > \frac{1}{2}$  tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 (1+|x|)^{-2\gamma} dx &= \sum_{j=0}^{+\infty} \int_{B_{2^{j+1}} \setminus B_{2^j}} |f(x)|^2 (1+|x|)^{-2\gamma} dx \\ &\quad + \int_{B_1} |f(x)|^2 (1+|x|)^{-2\gamma} dx \\ &\leq C \sum_{j=0}^{+\infty} \int_{B_{2^{j+1}}} |f(x)|^2 2^{-2j\gamma} dx + \int_{B_1} |f(x)|^2 dx \\ &= C \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-2\epsilon j} \frac{1}{2^j} \int_{B_{2^{j+1}}} |f(x)|^2 dx + \int_{B_1} |f(x)|^2 dx \\ &\leq C \sup_{R, x_0} \frac{1}{R} \int_{B(x_0, R)} |f(x)|^2 dx, \end{aligned}$$

donde expresamos  $\gamma = 1/2 + \epsilon$ ,  $\epsilon > 0$ . Hemos probado que

$$\|f\|_{L^2_{-\gamma}} \leq C \sup_{R, x_0} \left( \frac{1}{R} \int_{B(x_0, R)} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Aplicando este hecho al lema 1.2.3 para las resolventes saliente y entrante  $R_{\pm}(k^2)$  en el caso  $\frac{1}{t} - \frac{1}{2} = \frac{1}{n+1}$ , se obtienen las estimaciones (1.2.5) y

$$\|R_-(k^2)(f)\|_{L^2_{-\gamma}} \leq C k^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}} \|f\|_{L^t}. \quad (1.2.7)$$

Ya que el adjunto de  $R_-(k^2)$  es la resolvente saliente, la expresión (1.2.7) nos conduce por dualidad a (1.2.6).

Por fin, enunciamos la estimación que nos interesa (véase el lema 3.4 en [Ru1]). Escribimos  $R_\theta(k^2)(f)(x) := e^{-ik\theta \cdot x} R_+(k^2)(e^{ik\theta \cdot (\cdot)} f(\cdot))(x)$ .

**Proposición 1.2.1.** Sean  $r$  y  $t$  tales que  $0 \leq \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{n+1}$  y  $0 \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{r} \leq \frac{1}{n+1}$ ,  $k > 0$  y  $\alpha \geq 0$ . Entonces existen  $\delta, \tilde{\delta}$  y una constante  $C > 0$  independiente de  $k$  tales que para toda  $f \in W_{\tilde{\delta}}^{\alpha, t}(\mathbb{R}^n)$  se verifica

$$\|R_\theta(k^2)(f)\|_{W_{\delta}^{\alpha, r}} \leq C k^{-1+\frac{n-1}{2}(\frac{1}{t}-\frac{1}{r})} \|f\|_{W_{\tilde{\delta}}^{\alpha, t}}. \quad (1.2.8)$$

Más aún, se pueden escoger los exponentes  $\delta, \tilde{\delta}$  de la forma

$$\delta = \delta(r) = \gamma(n+1) \left[ \frac{1}{n+1} - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{r} \right) \right], \quad (1.2.9)$$

$$\tilde{\delta} = \tilde{\delta}(t) = \gamma(n+1) \left[ \frac{1}{n+1} - \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \right) \right], \quad (1.2.10)$$

donde  $\gamma$  es cualquier número real mayor que  $\frac{1}{2}$ , de manera que  $0 \leq \delta(r) \leq \gamma$ ,  $0 \leq \tilde{\delta}(t) \leq \gamma$ , y

$$\delta(r) = \begin{cases} \gamma, & \text{si } \frac{1}{2} - \frac{1}{r} = 0, (r = 2), \\ 0, & \text{si } \frac{1}{2} - \frac{1}{r} = \frac{1}{n+1}, (r = \frac{2n+2}{n-1}), \end{cases}$$

$$\tilde{\delta}(t) = \begin{cases} \gamma, & \text{si } \frac{1}{t} - \frac{1}{2} = 0, (t = 2), \\ 0, & \text{si } \frac{1}{t} - \frac{1}{2} = \frac{1}{n+1}, (t = \frac{2n+2}{n+3}). \end{cases}$$

Necesitaremos la siguiente extensión del teorema de interpolación de Stein-Weiss para espacios de Lebesgue con diferentes exponentes (véase el corolario 5.5.4 en [BL]).

**Teorema 1.2.** *Supongamos que  $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 < \infty$ , y que  $T$  es un operador tal que*

$$T : L^{p_0}(w_0) \rightarrow L^{q_0}(\tilde{w}_0),$$

$$T : L^{p_1}(w_1) \rightarrow L^{q_1}(\tilde{w}_1),$$

*y es acotado en los dos casos con normas  $M_0$  y  $M_1$  respectivamente. Entonces*

$$T : L^p(w) \rightarrow L^q(\tilde{w})$$

*también es acotado con norma  $M$  verificando*

$$M \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta,$$

donde  $0 \leq \theta \leq 1$ , y

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1},$$

$$w = w_0^{p(1-\theta)/p_0} w_1^{p\theta/p_1}, \quad \tilde{w} = \tilde{w}_0^{q(1-\theta)/q_0} \tilde{w}_1^{q\theta/q_1}.$$

### Demostración de la proposición 1.2.1

El operador  $R_\theta(k^2)$  conmuta con las derivadas fraccionarias por tratarse del multiplicador de Fourier dado por

$$\mathcal{F}(R_\theta(k^2)(f))(\xi) = (-|\xi + k\theta|^2 + k^2 + i0)^{-1} \mathcal{F}f(\xi).$$

Por ello, nos podemos reducir al caso  $\alpha = 0$ . Puesto que la norma en  $L^p$  es invariante por modulaciones, es suficiente probar la estimación

$$\|R_+(k^2)(f)\|_{L^r_{-\delta(r)}} \leq C k^{-1+\frac{n-1}{2}(\frac{1}{t}-\frac{1}{r})} \|f\|_{L^t_{\delta(t)}}. \quad (1.2.11)$$

Considerando el plano cartesiano con las coordenadas  $(x, y)$  dadas por

$$x = \frac{1}{t} - \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{2} - \frac{1}{r},$$

tenemos la intención de obtener la estimación de la resolvente (1.2.11) para  $(x, y)$  variando en el cuadrado  $[0, \frac{1}{n+1}] \times [0, \frac{1}{n+1}]$ , minimizando el exponente de la potencia de  $k$  todo lo que se pueda. En la figura 1.1 expresamos en el eje vertical perpendicular al plano  $xy$  el exponente de  $k$  cambiado de signo que corresponde a la estimación de la resolvente para cada  $r, t$ .

Empezamos por interpolar las estimaciones (1.2.4) y (1.2.6) correspondientes a los puntos  $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{r+1})$ ,  $(0, \frac{1}{n+1})$  de nuestro plano, para obtener estimaciones a lo largo del segmento que une dichos puntos. Aplicando el teorema de interpolación 1.2 al lema 1.2.2 en el caso  $r = \frac{2n+2}{n-1}$  (cuando  $\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} = \frac{2}{n+1}$  toma el valor mínimo posible) y a la estimación (1.2.6) obtenemos

$$\|R_+(k^2)f\|_{L^{\frac{2n+2}{n-1}}} \leq C k^{\frac{1}{t_1} \frac{n-1}{2} - \frac{n^2+2n+5}{4n+4}} \|f\|_{L^{t_1((1+|x|)^{\delta_1})}}, \quad (1.2.12)$$

donde  $\delta_1 = \gamma t_1(1 - (\frac{1}{t_1} - \frac{1}{2})(n+1))$ , y  $0 \leq \frac{1}{t_1} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{n+1}$ .

A continuación, tomando combinaciones lineales convexas de los puntos del segmento de extremos  $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1})$ ,  $(0, \frac{1}{n+1})$  y el punto  $(\frac{1}{n+1}, 0)$  generamos el triángulo de vértices  $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1})$ ,  $(0, \frac{1}{n+1})$ ,  $(\frac{1}{n+1}, 0)$ . Así, interpolando la estimación (1.2.12) para cada  $t_1$  tal que

$$0 \leq \frac{1}{t_1} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{n+1},$$

y la estimación (1.2.5) obtendremos la expresión deseada (1.2.11) en el triángulo

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \frac{1}{n+1}, \quad \frac{1}{n+1} - y \leq x \leq \frac{1}{n+1} \right\}.$$

Para ello aplicamos el teorema 1.2 con las condiciones

$$\begin{aligned} p_0 &= t_1, \quad p_1 = \frac{2n+2}{n+3}, \quad q_0 = \frac{2n+2}{n-1}, \quad q_1 = 2, \quad p = t, \quad q = r, \\ w_0 &= (1 + |x|)^{\delta_1}, \quad w_1 = 1, \quad \tilde{w}_0 = 1, \quad \tilde{w}_1(x) = (1 + |x|)^{-2\gamma}, \\ \frac{1}{r} &= \frac{1-\theta}{\frac{2n+2}{n-1}} + \frac{\theta}{2}, \quad \frac{1}{t} = \frac{1-\theta}{t_1} + \frac{\theta}{\frac{2n+2}{n+3}}, \quad 0 \leq \theta \leq 1, \end{aligned}$$

donde las expresiones de la última línea nos indican el rango para  $r, t$ :

$$0 \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{r} \leq \frac{1}{n+1}, \quad \frac{1}{r} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Puesto que la condición  $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{\frac{2n+2}{n-1}} + \frac{\theta}{2}$  implica  $\theta = \frac{n+1}{r} - \frac{n-1}{2}$ , el teorema de interpolación nos dice

$$\tilde{w}(x) = (1 + |x|)^{-\gamma r \theta} = (1 + |x|)^{-r \delta(r)}.$$

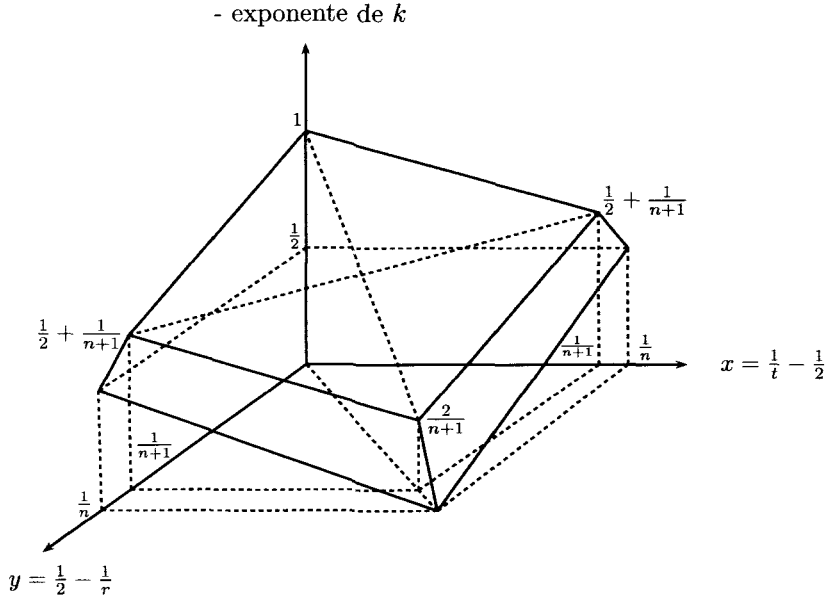


Figura 1.1. Gráfica de las estimaciones de la resolvente.

Se puede expresar  $t_1$  en función de  $r$  y  $t$  usando que las condiciones  $\frac{1}{t} = \frac{1-\theta}{t_1} + \frac{\theta}{\frac{2n+2}{n+3}}$  y  $\theta = \frac{n+1}{r} - \frac{n-1}{2}$  implican

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_1} &= \frac{1}{t(1-\theta)} - \frac{n+3}{2n+2} \frac{\theta}{1-\theta} \\ &= \frac{[4(n+1) + (n+3)(n-1)t]r - 2(n+1)(n+3)t}{2(n+1)^2 t(r-2)}. \end{aligned}$$

Con las condiciones que tenemos el teorema 1.2 nos da

$$w(x) = (1 + |x|)^{\delta_1 \frac{t}{t_1} (1-\theta)} = (1 + |x|)^{t\bar{\delta}(t)}.$$

Hemos demostrado la estimación (1.2.11) con las restricciones

$$0 \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{r} \leq \frac{1}{n+1}, \quad \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right) \leq \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Para conseguir estimaciones en la segunda mitad del cuadrado que nos queda, desde el punto de vista geométrico tomaremos combinaciones lineales convexas del segmento de extremos  $(\frac{1}{n+1}, 0)$ ,  $(0, \frac{1}{n+1})$  y el origen. Para ello, interpolamos la estimación

$$\|R_+(k^2)(f)\|_{L_{\delta(r_1)}^{r_1}} \leq C k^{-1 + \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{r_1}\right)} \|f\|_{L_{\delta(t_2)}^{t_2}}, \quad (1.2.13)$$

con las restricciones

$$0 \leq \frac{1}{t_2} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{n+1}, \quad \frac{1}{t_2} - \frac{1}{r_1} = \frac{1}{n+1},$$



y la estimación de Agmon. Aplicamos el teorema 1.2 con las condiciones

$$\begin{aligned} p_0 &= t_2, p_1 = 2, q_0 = r_1, q_1 = 2, p = t, q = r, \\ w_0 &= (1 + |x|)^{t_2 \tilde{\delta}(t_2)}, w_1 = (1 + |x|)^{2\gamma}, \tilde{w}_0 = (1 + |x|)^{-r_1 \delta(r_1)}, \tilde{w}_1(x) = (1 + |x|)^{-2\gamma}, \\ \frac{1}{r} &= \frac{1-\theta}{r_1} + \frac{\theta}{2}, \quad \frac{1}{t} = \frac{1-\theta}{t_2} + \frac{\theta}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 1, \end{aligned}$$

siendo ahora el rango para  $r, t$ :

$$0 \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{r} \leq \frac{1}{n+1}, \quad 0 \leq \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{r} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}.$$

En las condiciones que estamos el teorema 1.2 nos da

$$w(x) = (1 + |x|)^{t_2 \tilde{\delta}(t_2) \frac{t}{t_2} (1-\theta)} (1 + |x|)^{\gamma t \theta} \quad (1.2.14)$$

$$= (1 + |x|)^{\tilde{\delta}(t_2) t (1-\theta) + \gamma t \theta}. \quad (1.2.15)$$

Aclaremos en primer lugar los pasos para expresar  $\theta$  en función de  $r$  y  $t$ . De la condiciones

$$\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_1} + \frac{\theta}{2}, \quad \frac{1}{t} = \frac{1-\theta}{t_2} + \frac{\theta}{2}, \quad \frac{1}{t_2} - \frac{1}{r_1} = \frac{1}{n+1},$$

se deducen las expresiones

$$\theta = \frac{2}{r} \frac{r_1 - r}{r_1 - 2}, \quad t_2 = 2t \frac{1-\theta}{2-\theta t}, \quad r_1 = t_2 \frac{n+1}{n+1-t_2},$$

respectivamente, de las cuales se obtiene una ecuación polinómica de segundo grado en  $\theta$  que tiene por soluciones  $\theta = 1$ , y

$$\theta = 1 + (n+1) \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{t} \right). \quad (1.2.16)$$

Ahora expresar  $t_2$  en términos de  $r$  y  $t$  es sencillo:

$$t_2 = 2t \frac{1-\theta}{2-\theta t} = \frac{2(n+1)(r-t)}{(2-t)r + (n+1)(r-t)}. \quad (1.2.17)$$

A partir de las fórmulas (1.2.16) y (1.2.17) y retomando las identidades (1.2.14)-(1.2.15) se llega a

$$w(x) = (1 + |x|)^{t \tilde{\delta}(t)}.$$

El teorema de interpolación nos dice

$$\begin{aligned} \tilde{w}(x) &= (1 + |x|)^{-r_1 \delta(r_1) \frac{r}{r_1} (1-\theta)} (1 + |x|)^{-\gamma r \theta} \\ &= (1 + |x|)^{-\delta(r_1) r (1-\theta) - \gamma r \theta}. \end{aligned}$$

Por la fórmula (1.2.17),

$$r_1 = t_2 \frac{n+1}{n+1-t_2} = \frac{2(n+1)(r-t)}{(2-t)r + (n-1)(r-t)}.$$

En virtud de esta última expresión y de la fórmula (1.2.16) podemos escribir

$$\tilde{w}(x) = (1 + |x|)^{-r\delta(r)}.$$

Queda vista entonces la estimación (1.2.11) con las restricciones

$$0 \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{r} \leq \frac{1}{n+1}, \quad 0 \leq \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{n+1} - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{r} \right),$$

y también en todo el rango de valores para  $r$  y  $t$  dado por

$$0 \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{r} \leq \frac{1}{n+1}, \quad 0 \leq \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{n+1}.$$

□

### 1.3. El Problema Directo

En esta sección estudiaremos algunos resultados concernientes al problema directo de *scattering* y algunas propiedades de la solución de *scattering* necesarias para establecer el problema inverso. Consideramos el operador de Schrödinger  $H = -\Delta + q(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , para un potencial  $q$  que toma valores reales. En la teoría de *scattering* se consideran las autofunciones generalizadas de este operador, que son las soluciones del siguiente problema

$$\begin{cases} (H - k^2)u = 0 \text{ en } \mathbb{R}^n, \\ u = u_i + u_s, \end{cases} \quad (1.3.1)$$

donde la función  $u_s$  satisface la condición de radiación de Sommerfeld saliente:

$$\frac{\partial}{\partial r} u_s(k, \theta, x) - iku_s(k, \theta, x) = o(r^{-\frac{n-1}{2}}),$$

cuando  $r = |x| \rightarrow \infty$ . Estas soluciones son la respuesta a la acción de una onda plana incidente  $u_i(k, \theta, x) = e^{ik\theta \cdot x}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , con número de onda  $k$ , dirección de incidencia  $\theta$  y energía  $k^2$ .

Teniendo en cuenta que la onda incidente  $u_i$  es una solución entera (es decir, en todo el espacio) de la ecuación de Helmholtz y suponiendo que  $u$  cumple (1.3.1), la parte difractada  $u_s$  satisface la ecuación

$$(\Delta + k^2)u_s = qu_i + qu_s. \quad (1.3.2)$$

Aplicando el operador de la resolvente saliente a ambos lados de (1.3.2), gracias a la condición de radiación, se obtiene la llamada ecuación integral de Lippmann-Schwinger

$$u(k, \theta, x) = u_i(k, \theta, x) + R_+(k^2)(q(\cdot)u(k, \theta, \cdot))(x).$$

Escribiendo  $R_+(k^2)$  como el operador de convolución con la solución fundamental saliente de la ecuación de Helmholtz  $\phi_k$  (véase (1.1.3)), tenemos que

$$u(k, \theta, x) = u_i(k, \theta, x) + \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k(x - y)q(y)u(k, \theta, y)dy. \quad (1.3.3)$$

El tratamiento del problema directo (existencia y unicidad) está basado en las estimaciones a priori para la resolvente del laplaciano utilizando la ecuación integral (1.3.3), más un argumento de perturbación que puede ser o bien con teoría de Fredholm aplicada al operador

$$T_k(f) := R_+(k^2)(qf),$$

(véase [CK1]) junto con el teorema de unicidad de Rellich y el principio de continuación única de Jerison-Kenig en el caso de potenciales reales, o bien a través de la serie de Neumann, llamada en este contexto serie de Neumann-Born, suponiendo que la energía es suficientemente grande con  $k > k_0 \geq 0$ , donde  $k_0$  depende de cierta cota a priori para el potencial  $q$ . A modo de ejemplo enunciamos la siguiente proposición (véase [Ru2]):

**Proposición 1.3.1.** *Sea  $q \in L^r$  de soporte compacto y  $r > \frac{n}{2}$ ,  $k > 0$ . Supongamos que  $0 \leq \alpha \leq 1 - \frac{n}{2r}$  y  $\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{1}{r}$ . Entonces existen una única solución de scattering  $u_s$  y una constante  $\beta > 0$  tales que para todo  $k > k_0$*

$$\|D^\alpha u_s\|_{L^{p'}(\langle x \rangle^{-\beta})} \leq C k^{\alpha + \frac{n}{2r} - 1} \|q\|_{L^p(\langle x \rangle^\beta)},$$

para algún  $k_0 > 0$  y cierta constante  $C$  independiente  $k$ ,  $q$  y  $u_s$ .

Si  $q$  tiene soporte compacto,  $u_s$  es solución saliente de la ecuación de Helmholtz homogénea  $(\Delta + k^2)u_s = 0$  en el exterior del soporte de  $q$  y, en virtud del corolario 1.1, el comportamiento asintótico de  $u_s$  viene dado por

$$u_s(k, \theta, x) = \left( \frac{k}{|x|} \right)^{\frac{n-1}{2}} e^{ik|x|} u_\infty(k, \theta, \frac{x}{|x|}) + o(|x|^{\frac{1-n}{2}}),$$

cuando  $|x| \rightarrow +\infty$ . La función  $u_\infty : \mathbb{R} \times S^{n-1} \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{C}$  se conoce como el *campo lejano* o *amplitud de scattering*. Se puede probar (véase página 53 en [Ru2]) el siguiente

**Lema 1.3.1.** *[Definición de la transformada de Fourier en scattering.] Sea  $v$  solución saliente de la ecuación de Helmholtz no homogénea con fuente  $f$*

$$\Delta v + k^2 v = f,$$

donde  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Entonces se cumple, cuando  $|x| \rightarrow +\infty$ ,

$$v(x) = C k^{\frac{n-1}{2}} \frac{e^{ik|x|}}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} v_\infty(k, \frac{x}{|x|}) + o(|x|^{-\frac{n-1}{2}}).$$

Más aún, se tiene que

$$v_\infty(k, \frac{x}{|x|}) = \hat{f}\left(\frac{kx}{|x|}\right).$$

Este lema nos brinda una identidad que se puede generalizar por densidad manteniendo la condición de que  $f$  sea de soporte compacto para funciones menos regulares, incluso distribuciones de soporte compacto. Si  $q$  tiene soporte compacto, haciendo  $f(x) := q(x)u(k, \theta, x)$  en tal generalización, obtenemos la ecuación integral

$$u_\infty(k, \theta, \frac{x}{|x|}) = C \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik \frac{x}{|x|} \cdot y} q(y) u(k, \theta, y) dy, \quad (1.3.4)$$

que satisface el campo lejano de las autofunciones generalizadas del operador  $H$  con onda incidente  $u_i(k, \theta, x) = e^{ik\theta \cdot x}$ .

Substituyendo la ecuación de Lippmann-Schwinger en la ecuación integral (1.3.4) deducimos el *desarrollo en serie de Neumann-Born* de  $u_\infty$ :

$$\begin{aligned} u_\infty(k, \theta, \omega) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik(\omega - \theta) \cdot y} q(y) dy + \sum_{j=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik\omega \cdot y} (qR_+(k^2))^j (q(\cdot)u_i(k, \theta, \cdot))(y) dy \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik\omega \cdot y} (qR_+(k^2))^m (q(\cdot)u(k, \theta, \cdot))(y) dy, \end{aligned}$$

cuyo término lineal en  $q$  nos da la transformada de Fourier del potencial  $q$  en las llamadas *esferas de Ewald* que definimos a continuación.

**Definición.** Se define la *esfera de Ewald* para cada  $k > 0$  y  $\theta \in S^{n-1}$  fijos como la esfera de centro  $-k\theta$  y radio  $k$  que se puede describir por  $\{k(\omega - \theta) : \omega \in S^{n-1}\}$ .

Escribimos más sintéticamente

$$u_\infty(k, \theta, \omega) = \hat{q}(\xi) + \sum_{j=1}^m Q_{j+1}^*(q)(k, \theta, \omega) + R_m^*(k, \theta, \omega), \quad (1.3.5)$$

donde  $\xi := k(\omega - \theta)$ , el término  $j$ -ésimo viene dado por

$$Q_j^*(q)(k, \theta, \omega) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik\omega \cdot y} (qR_+(k^2))^{j-1} (q(\cdot)e^{ik\theta \cdot (\cdot)})(y) dy, \quad (1.3.6)$$

y el resto por

$$R_m^*(k, \theta, \omega) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik\omega \cdot y} (qR_+(k^2))^m (q(\cdot)u(k, \theta, \cdot))(y) dy.$$

El problema también resulta interesante si el potencial no es de soporte compacto. En este caso su comportamiento en infinito clasifica a los potenciales como de corto o largo alcance, y se toma la expresión (1.3.4) como definición de la amplitud de *scattering* (consúltese [ER1]).



### 1.4. El Problema Inverso

El problema inverso de *scattering* consiste en la recuperación del potencial  $q$  a partir de las mediciones del campo lejano  $u_\infty(k, \theta, \omega)$ . Observemos que  $u_\infty$  depende del número de onda  $k$ , de la dirección incidente  $\theta$  y de la dirección del receptor  $\omega \in S^{n-1}$ .

El problema inverso partiendo del conocimiento de  $u_\infty$  para todos sus parámetros es un problema sobredeterminado y se sabe que hay unicidad (en el caso de la ecuación de Schrödinger). De hecho, basta con conocer  $u_\infty(k, \theta_0, \omega)$  para los ángulos incidentes  $\theta_0$  de una semigeodésica de la esfera unitaria. Sin embargo, esta recuperación se hace a través de la transformada de Fourier  $\hat{q}(\xi)$  para lo cual hay que medir la amplitud de *scattering* en parámetros  $\theta_0$  y  $\omega$  que sean ortogonales. La medición en este caso requiere que el número de onda tienda a infinito (véase [Ru2]). Esto es algo que en las aplicaciones prácticas se tiende a evitar. Más concretamente, se tiene la siguiente proposición (véanse [PSe], [Ru2]):

**Proposición 1.4.1.** *Sea  $q$  un potencial de soporte compacto en  $L^r(\mathbb{R}^n)$ , con  $r > n/2$ . Supóngase que  $\theta_0 \in S^{n-1}$  es ortogonal a  $\xi$  y sea  $\{\theta_j : j \geq 1\}$  una sucesión de puntos de la esfera  $S^{n-1}$  tal que  $\lim_{j \rightarrow \infty} \theta_j = \theta_0$ . Entonces*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{F}(q_B^{\theta_j})(\xi) = \mathcal{F}q(\xi),$$

donde  $q_B^{\theta_j}$  denota la aproximación de Born de ángulo fijo  $\theta_j$  que se define en (1.4.12) para  $q$  real.

Si bien en la práctica se mide la llamada *aproximación de Born*  $q_b$  (véase (1.4.1)) para aproximar el potencial, un problema más débil que el problema inverso de *scattering*, pero de gran importancia es el problema de la recuperación de singularidades. Este problema consiste en estudiar si las singularidades del potencial están contenidas en la aproximación de Born, es decir, en responder a la pregunta de si  $q - q_b$  es una función más regular que  $q$ . En este trabajo medimos las singularidades en la escala de Sobolev Hilbertiana, es decir, queremos saber si a partir de un potencial  $q$  en el espacio  $W^{\alpha,2}(\mathbb{R}^n)$  se cumple que  $q - q_b \in W^{\beta,2}(\mathbb{R}^n)$ , donde  $\beta > \alpha$ . Éste es el problema central de esta memoria.

Otro problema importante es el de la reconstructibilidad que consiste en una serie de métodos constructivos que aproximan numéricamente el potencial a partir de los datos del campo lejano.

A la vista de la sobredeterminación del problema inverso con datos globales, tiene sentido considerar la recuperación de  $q$  a partir de un conocimiento parcial de  $u_\infty$ . En función de la información parcial del campo lejano de la que se parte, se distinguen diversos problemas inversos de *scattering*. Los problemas más estudiados son los siguientes:

- (a) *Scattering* inverso de ángulo fijo: se supone conocido  $u_\infty(k, \theta_0, \omega)$  para todos los valores de  $k, \omega$  y una sola dirección incidente  $\theta_0$ . El problema está formalmente bien determinado en cualquier dimensión.

Para potenciales pequeños con cierta regularidad, Stefanov probó la unicidad (unicidad local), así como la unicidad genérica en espacios de Sobolev con cuatro derivadas (véase [S]).

Estudiando los términos no lineales de la serie de Neumann-Born, Ruiz demuestra que las singularidades principales del potencial  $q$ , medidas en la escala de Sobolev, están contenidas en su aproximación de Born de ángulo fijo, para dimensiones  $n = 2$  y  $n = 3$  (véase [Ru1]). Un ingrediente clave aquí son estimaciones no autoadjuntas  $L^p$  para la resolvente similares a las de Ruiz y Vega que se han descrito más arriba (véase [RVE]).

- (b) Problema inverso de energía fija: se supone conocida la amplitud para todas las direcciones y un solo número de onda  $k$ . El problema está formalmente bien determinado en el plano y sobredeterminado en dimensión mayor.

Nachman y Novikov y Ramm probaron la unicidad y la reconstructibilidad, para  $n \geq 3$  (véanse [Na], [No], [R]), mientras que para  $n = 2$  el problema permanece abierto, aunque Sun y Uhlmann obtuvieron la recuperación de singularidades (véase [SU1]), así como la unicidad genérica (véase [SU2]).

- (c) Problema de datos de retroceso o problema inverso de *backscattering*: se supone conocida la amplitud de *scattering* para ángulos incidente y receptor opuestos y todos los números de onda (el eco). El problema está formalmente bien determinado en cualquier dimensión.

La unicidad para potenciales pequeños en la llamada *clase de Friedrich* fue demostrada formalmente por Prosser (consúltase [P]), y por Lagergren para clases diferentes en dimensión  $n = 3$  partiendo de un potencial  $q$  con derivada en  $L^1$  (consúltase [L]). Eskin y Ralston (consúltense [ER1], [ER2], [ER3]) probaron la unicidad genérica (véase una demostración simplificada en [S] supuesto  $q$  con cuatro derivadas).

Ola, Päiväranta y Serov probaron que las singularidades de  $q$  están contenidas en la aproximación de Born  $q_B$  para los datos de *backscattering*, que definimos más abajo, en dimensión 2. Ellos demostraron que si  $q \in H_\delta^\alpha(\mathbb{R}^2)$  entonces  $q - q_B \in W^{\alpha+\varepsilon,2}(\mathbb{R}^2)$ , módulo una función continua y acotada, donde  $\varepsilon := \min\{2\alpha, \frac{1+5\alpha}{4}\} - \alpha$ , con  $\alpha > 0$  usando la notación

$$H_\delta^\alpha(\mathbb{R}^2) := \{f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2) : (1 + |x|^2)^{\frac{\delta}{2}} f \in W^{\alpha,2}(\mathbb{R}^2)\}.$$

En realidad, la estimación del término  $j$ -ésimo, para  $j \geq 3$ , en [OPS], tiene que cambiarse por la estimación que obtuvieron Ruiz y Vargas en [RV], donde se mejora el  $\varepsilon$  de [OPS] en dimensión  $n = 2$  y se suministra un resultado similar en dimensión  $n = 3$ . Greenleaf y Uhlmann probaron la recuperación de las singularidades conormales utilizando métodos hiperbólicos (consúltense [GU] y [U]).

En las aplicaciones prácticas en (a) y (c) se substituye  $q$  por

$$\widehat{q_b}(\xi) := u_\infty(k, \theta, \omega), \quad (1.4.1)$$

donde  $k, \omega, \theta$  están determinadas por la relación  $\xi := k(\omega - \theta)$ . En los casos de ángulo fijo y de retrodispersión, este cambio de variables es un difeomorfismo. La función  $q_b$  se conoce como la *aproximación de Born*.

Haciendo  $\omega = -\theta$  en (1.3.5) se deduce el desarrollo en serie de Neumann-Born para los datos de backscattering:

$$u_\infty(k, \theta, -\theta) - \hat{q}(-2k\theta) = \sum_{j=1}^m \widehat{Q_{j+1}(q)}(-2k\theta) + \widehat{R_m}(-2k\theta), \quad (1.4.2)$$

donde el término  $j$ -ésimo de la serie y el resto vienen dados en el lado de Fourier por

$$\begin{aligned} \widehat{Q_j(q)}(\xi) &:= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik\theta \cdot y} (qR_+(k^2))^{j-1} (q(\cdot) e^{ik\theta \cdot (\cdot)})(y) dy, \\ \widehat{R_m}(\xi) &:= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik\theta \cdot y} (qR_+(k^2))^m (q(\cdot) u(k, \theta, \cdot))(y) dy, \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

y expresamos  $\xi$  prácticamente en coordenadas polares con  $\xi = -2k\theta$ ,  $k > 0$ ,  $\theta \in S^{n-1}$ . Nótese que  $k$  y  $\theta$  se obtienen a partir de  $\xi$  biunívocamente mediante

$$k = \frac{|\xi|}{2}, \quad \theta = -\frac{\xi}{|\xi|}. \quad (1.4.4)$$

Aplicando este cambio de variables  $\xi = -2k\theta$  ( $k > 0$ ,  $\theta \in S^{n-1}$ ) de Jacobiano  $d\xi = (2k)^{n-1} dk d\sigma(\theta)$ , se tiene

$$q(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \hat{q}(\xi) d\xi = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} e^{-2ikx \cdot \theta} \hat{q}(-2k\theta) (2k)^{n-1} d\sigma(\theta) dk. \quad (1.4.5)$$

Substituyendo la serie de Neumann-Born (1.4.2) en (1.4.5) y despreciando la parte no lineal de ésta, la expresión (1.4.5) motiva la definición de  $q_b$  para los datos de backscattering dada por

$$q_B(x) := 2^{n-1} \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} e^{-2ikx \cdot \theta} u_\infty(k, \theta, -\theta) k^{n-1} d\sigma(\theta) dk. \quad (1.4.6)$$

Esta definición (1.4.6) es equivalente a (1.4.1) con  $\xi = -2k\theta$  (haciendo  $\omega = -\theta$ ), donde  $k$  y  $\theta$  están determinados por  $\xi$  mediante (1.4.4). En efecto:

$$\begin{aligned} \hat{q}_B(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} q_B(x) e^{-ix \cdot \xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} 2^{n-1} \int_0^\infty k^{n-1} \int_{S^{n-1}} e^{-2ikx \cdot \theta} u_\infty(k, \theta, -\theta) d\sigma(\theta) dk dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi'} u_\infty(|\xi'|/2, -\xi'/|\xi'|, \xi'/|\xi'|) d\xi' dx \\ &= u_\infty(|\xi|/2, -\xi/|\xi|, \xi/|\xi|), \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

donde el cambio de variables  $\xi' = -2k\theta$ ,  $k > 0$ ,  $\theta \in S^{n-1}$ , explica la igualdad en (1.4.7).

Sin considerar el resto en (1.4.2) se puede escribir:

$$\widehat{q_B - q}(\xi) = \sum_{j=2}^{\infty} \widehat{Q_j(q)}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (1.4.8)$$

Volviendo al problema de ángulo fijo, para cada  $\theta \in S^{n-1}$  fijo, se cumple

$$q(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \hat{q}(\xi) d\xi = \int_{\{\xi \cdot \theta < 0\}} e^{ix \cdot \xi} \hat{q}(\xi) d\xi + \int_{\{\xi \cdot \theta > 0\}} e^{ix \cdot \xi} \hat{q}(\xi) d\xi \quad (1.4.9)$$

$$= \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} e^{ikx \cdot (\omega - \theta)} \hat{q}(k(\omega - \theta)) k^{n-1} |\omega - \theta|^2 d\sigma(\omega) dk \quad (1.4.10)$$

$$+ \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} e^{ikx \cdot (\omega + \theta)} \hat{q}(k(\omega + \theta)) k^{n-1} |\omega + \theta|^2 d\sigma(\omega) dk. \quad (1.4.11)$$

En la primera integral de la suma en (1.4.9) hacemos el cambio de variable  $\xi = k(\omega - \theta)$  y en la segunda el cambio  $\xi = k(\omega + \theta)$ , donde  $k > 0$ ,  $\omega \in S^{n-1}$ . Ambas transformaciones conllevan los cambios de medida

$$d\xi = k^{n-1} |\omega - \theta|^2 d\sigma(\omega) dk,$$

$$d\xi = k^{n-1} |\omega + \theta|^2 d\sigma(\omega) dk,$$

respectivamente y constituyen un difeomorfismo en cada uno de los semiespacios

$$\{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi \cdot \theta < 0\},$$

$$\{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi \cdot \theta > 0\}.$$

Substituyendo la serie de Neumann-Born (1.3.5) en (1.4.10)-(1.4.11) y despreciando la parte no lineal de ésta, en el caso de un potencial real  $q$  de manera que  $\hat{q}(\xi) = \overline{\hat{q}(-\xi)}$ , la expresión (1.4.10)-(1.4.11) se escribe:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} e^{ikx \cdot (\omega - \theta)} u_\infty(k, \theta, \omega) k^{n-1} |\omega - \theta|^2 d\sigma(\omega) dk \\ & + \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} e^{ikx \cdot (\omega + \theta)} u_\infty(k, -\theta, \omega) k^{n-1} |\omega + \theta|^2 d\sigma(\omega) dk \\ & = 2\text{Re} \left( \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} e^{ikx \cdot (\omega - \theta)} u_\infty(k, \theta, \omega) k^{n-1} |\omega - \theta|^2 d\sigma(\omega) dk \right), \end{aligned}$$

puesto que las relaciones de simetría que se tienen para potenciales reales implican que

$$\begin{aligned} & \overline{\int_0^\infty \int_{S^{n-1}} e^{ikx \cdot (\omega + \theta)} u_\infty(k, -\theta, \omega) k^{n-1} |\omega + \theta|^2 d\sigma(\omega) dk} \\ & = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} e^{ikx \cdot (\omega - \theta)} u_\infty(k, \theta, \omega) k^{n-1} |\omega - \theta|^2 d\sigma(\omega) dk. \end{aligned}$$



Este hecho motiva definir la aproximación de Born para los datos de ángulo fijo y  $q$  real como

$$q_B^\theta(x) := 2\text{Re} \left( \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} e^{ikx \cdot (\omega - \theta)} u_\infty(k, \theta, \omega) k^{n-1} |\omega - \theta|^2 d\sigma(\omega) dk \right). \quad (1.4.12)$$

La definición (1.4.12) resulta ser equivalente a (1.4.1), donde  $k$  y  $\omega$  están biunívocamente determinados por  $\xi$  con  $\theta$  fijo mediante las expresiones

$$k = \frac{|\xi|}{2\theta \cdot \widehat{\xi}}, \quad \omega = \theta + 2(\theta \cdot \widehat{\xi}) \widehat{\xi}, \quad (1.4.13)$$

siempre que  $\xi \cdot \theta \neq 0$ , donde  $\widehat{\xi} = \frac{\xi}{|\xi|}$ .

Toda la metodología sumada al conjunto de procesos numéricos que se emplea para la reconstrucción de  $q_b$  a partir de la amplitud de *scattering* se denomina *Tomografía de Difracción*. Comparando las expresiones (1.4.6) y (1.4.12) observamos que la construcción de  $q_b$  a partir del campo lejano  $u_\infty$  es mucho más difícil para los datos de ángulo fijo que para los datos de retrodispersión. De hecho, el cambio de variables (1.4.13) es singular en todo el plano  $\{\xi : \xi \cdot \theta = 0\}$ , mientras que el cambio  $\xi = -2k\theta$  sólo es singular en el origen. Esto explica que la Tomografía de Difracción para los datos de ángulo fijo sea mucho más complicada que para el caso del *backscattering*.

No obstante, la cuestión básica de saber cuánta información sobre el verdadero potencial  $q$  contiene  $q_b$  permanece abierta. Por tanto, no se conoce la fundamentación matemática rigurosa de la Tomografía de Difracción. En [Ru1] se justifica débilmente el esquema de migración para el *scattering* inverso de ángulo fijo. Esta memoria junto con el trabajo de A. Ruiz y A. Vargas (véase [RV]) pretende suministrar una base matemática a la Tomografía de Difracción mediante la reconstrucción de las singularidades del verdadero potencial para el operador de Schrödinger a través de la aproximación de Born (esquema de migración para los datos de *backscattering*).

## 1.5. Contenido de la Tesis Doctoral

Este trabajo contribuye a la fundamentación matemática de la Tomografía de Difracción para la ecuación de Schrödinger a partir de los datos de retrodispersión, que se establece matemáticamente en el teorema 1.0.1, esto es, en la ganancia de  $\frac{1}{2}^-$  derivada de  $q - q_B$  respecto del potencial  $q$  en la escala de los espacios de Sobolev Hilbertianos en dimensiones 2 y 3.

El problema físico del *backscattering* inverso es difícil de analizar debido a la influencia de los fenómenos de dispersión múltiple. En nuestro contexto, la expresión matemática de estos fenómenos viene dada por los términos no lineales de la serie de Neumann-Born.

El efecto de la dispersión múltiple es muy fuerte y las estimaciones que se conocen para los términos de dispersión múltiple son débiles. En esta memoria se obtienen estimaciones mejores para los términos de dispersión triple en el caso bidimensional y de dispersión cuádruple en el caso tridimensional, que junto a los resultados de [RV], nos conducen al teorema 1.0.1.

En el apéndice C.2 mediante una fórmula de integración por partes que nos permite pasar las derivadas del término  $Q_j(q)$  al potencial  $q$ , se demuestra que para obtener el teorema 1.0.1 podemos permitirnos la reducción  $0 \leq \alpha < \frac{n}{2}$ . De este modo, el teorema 1.0.1 se deduce de los dos resultados siguientes:

**Teorema 1.5.1.** *Sean  $0 \leq \alpha < 1$  y  $q \in W^{\alpha,2}(\mathbb{R}^2)$  una función real de soporte compacto. Entonces  $q - q_B \in W^{\beta,2}(\mathbb{R}^2) + C^\infty(\mathbb{R}^2)$ , para todo  $\beta$  real tal que  $0 \leq \beta < \alpha + \frac{1}{2}$ .*

**Teorema 1.5.2.** *Sea  $q \in W^{\alpha,2}(\mathbb{R}^3)$  una función real de soporte compacto, con  $0 \leq \alpha < \frac{3}{2}$ . Entonces  $q - q_B \in W^{\beta,2}(\mathbb{R}^3) + C^\infty(\mathbb{R}^3)$ , para cualquier  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que  $0 \leq \beta < \alpha + \frac{1}{2}$ .*

Seguidamente vamos a indicar el camino para llegar a estos teoremas. A. Ruiz y A. Vargas en [RV] probaron las siguientes estimaciones para la dispersión múltiple (véase (1.4.8)):

**Proposición 1.5.1.** *Sea  $q \in W^{\alpha,2}(\mathbb{R}^n)$ ,  $0 \leq \alpha \leq n/2$  y  $j \in \{2, 3, \dots\}$ . Supongamos que  $q$  tiene soporte compacto. Entonces  $Q_j(q) \in W^{\beta,2}(\mathbb{R}^n) + C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , para todo  $\beta < \beta_j$ , donde*

$$\beta_j := \begin{cases} \frac{3}{4}(j-2) + \frac{\alpha}{4}(j-1), & \text{si } \alpha \leq \frac{1}{2} \text{ y } n=2, \\ (j-3)(\frac{3}{4} + \frac{\alpha}{4}) + 1, & \text{si } \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1 \text{ y } n=2, \\ \frac{j-2}{2} + (j-1)\frac{\alpha}{3} - \frac{1}{2}, & \text{si } 0 \leq \alpha \leq \frac{3}{4} \text{ y } n=3, \\ (j-3)(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{3}) + \frac{1}{2}, & \text{si } \frac{3}{4} \leq \alpha \leq \frac{3}{2} \text{ y } n=3. \end{cases} \quad (1.5.1)$$

**Nota.** Obsérvese que siempre que  $0 \leq \alpha < \frac{n}{2}$ , se tiene  $\beta_j \geq \alpha + \frac{1}{2}$ , tanto para  $n=2$  y  $j \geq 4$ , como para  $n=3$  y  $j \geq 5$ .

En dimensión 2 también dieron una estimación mejor para el término de dispersión doble  $Q_2(q)$  (véase la proposición 1.5.2 más abajo), deduciendo que si  $q$  cumple las condiciones del teorema 1.5.1 entonces  $q - q_B \in W^{\beta,2}(\mathbb{R}^2) + C^\infty(\mathbb{R}^2)$ , para todo  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que

$$\beta < \begin{cases} \alpha + \frac{1}{2}, & \text{si } \alpha \leq \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{si } \frac{1}{2} \leq \alpha < 1, \end{cases} \quad (1.5.2)$$

obteniéndose la ganancia de derivada en la parte rayada que se muestra en la figura 1.2.

De este modo el teorema 1.5.1 conlleva una mejora de este hecho para  $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ , como se aprecia en la figura 1.3.

Además, la ganancia de derivada (1.5.2) no permite sacar provecho de la citada fórmula de integración por partes para extender el resultado a cualquier  $\alpha \geq 0$ .

Las estimaciones conocidas para el término cúbico  $Q_3(q)$  de la serie de Neumann-Born en 2d no son suficientes para concluir lo que queremos. Para probar el teorema 1.5.1 necesitamos el primer resultado original de esta memoria que nos brinda un mejor control de la dispersión triple en dimensión 2 (véase [Re]):

**Teorema 1.5.3.** *Sea  $q$  una función de soporte compacto perteneciente al espacio  $W^{\alpha,2}(\mathbb{R}^2)$ , con  $0 \leq \alpha < 1$ . Entonces  $Q_3(q) \in W^{\beta,2}(\mathbb{R}^2) + C^\infty(\mathbb{R}^2)$ , para cualquier  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que  $0 \leq \beta < \alpha + 1$ . Además, para todo  $\beta$  así, existe una constante  $C(\alpha, \beta, q) > 0$  que depende de  $\alpha, \beta$  y del soporte de  $q$  tal que*

$$\|\tilde{Q}_3(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\alpha, \beta, q) \left( \|q\|_{L^2} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} + \|q\|_{L^2}^2 \right) \|q\|_{\dot{W}^{\alpha,2}}. \quad (1.5.3)$$

**Nota.** Observamos que el término de dispersión triple en dimensión 2 resulta mejor de lo que esperábamos con la ganancia de  $1^-$  derivada respecto al potencial.

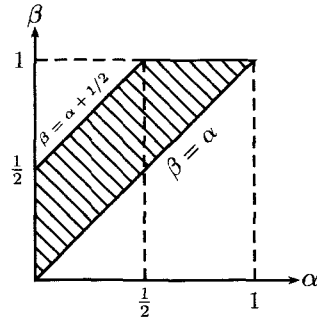


Figura 1.2. Ganancia de derivada de  $q - q_B$  respecto de  $q$  obtenida en [RV] en 2d.

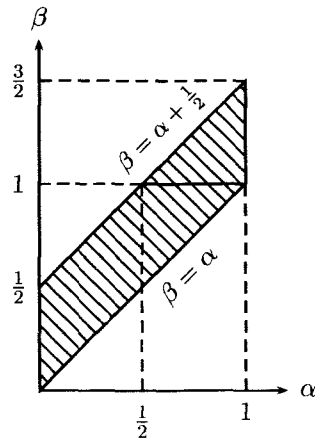


Figura 1.3. Mayor ganancia de derivada de  $q - q_B$  respecto de  $q$  en 2d.

El control del término de dispersión doble en dimensión 2 viene dado por la siguiente

**Proposición 1.5.2.** Sean  $\alpha \in \mathbb{R}$  con  $0 \leq \alpha < 1$  y  $q \in W^{\alpha,2}(\mathbb{R}^2)$  de soporte compacto. Entonces  $Q_2(q) \in W^{\beta,2}(\mathbb{R}^2) + C^\infty(\mathbb{R}^2)$  para todo  $\beta$  tal que  $0 \leq \beta < \alpha + \frac{1}{2}$ , y además existe una constante  $C(\alpha, \beta, q) > 0$  que sólo depende de  $\alpha$ ,  $\beta$  y del soporte de  $q$  tal que

$$\|\tilde{Q}_2(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\alpha, \beta, q) \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{\dot{W}^{\alpha,2}}. \quad (1.5.4)$$

En dimensión 3, a partir de las estimaciones para el término general de la serie de Neumann-Born de la proposición 1.5.1, y una mejora de dicha estimación para los términos de dispersión doble y triple  $Q_2(q)$  y  $Q_3(q)$  (véanse las proposiciones 1.5.3 y 1.5.4 más abajo), los autores citados deducen que en las hipótesis del teorema 1.5.2 se cumple  $q - q_B \in W^{\beta,2}(\mathbb{R}^3) + C^\infty(\mathbb{R}^3)$ , para todo  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que

$$\beta < \begin{cases} \alpha + \frac{1}{2}, & \text{si } \alpha \leq 3/4, \\ 1 + \alpha/3, & \text{si } 3/4 \leq \alpha \leq 3/2. \end{cases} \quad (1.5.5)$$

Este hecho se puede expresar mediante la siguiente figura donde la parte rayada de nuevo representa la ganancia de derivada de  $q - q_B$  respecto de  $q$ :

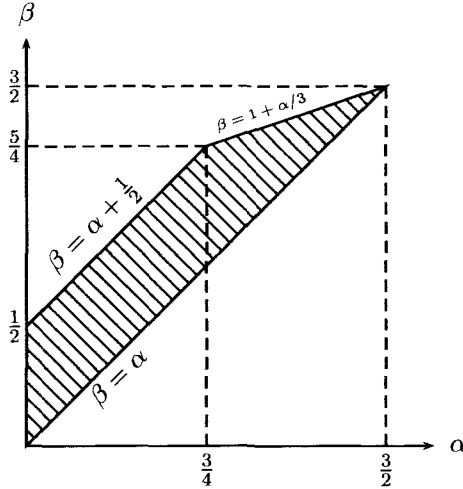


Figura 1.4. Ganancia de derivada de  $q - q_B$  respecto de  $q$  obtenida en [RV] en 3d.

Se consigue mayor ganancia de derivada para  $3/4 \leq \alpha \leq 3/2$  en el teorema 1.5.2 como indica la figura 1.5.

Aquí también queremos señalar que con la ganancia de derivada expresada en (1.5.5) no podríamos generalizar el resultado a cualquier  $\alpha \geq 0$ .

La estimación que proporciona la proposición 1.5.1 para el término cuártico  $Q_4(q)$  en 3d no permite concluir lo que queremos. La clave para probar el teorema 1.5.2 reside en

el segundo resultado original de la memoria que nos da una estimación más precisa de la dispersión cuádruple en dimensión 3:

**Teorema 1.5.4.** *Sea  $q \in W^{\alpha,2}(\mathbb{R}^3)$  una función de soporte compacto, con  $0 \leq \alpha < \frac{3}{2}$ . Entonces  $Q_4(q) \in W^{\beta,2}(\mathbb{R}^3) + C^\infty(\mathbb{R}^3)$ , para cualquier  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que  $0 \leq \beta < \alpha + \frac{1}{2}$ . Además, existe una constante  $C(\alpha, \beta, q) > 0$  que depende de  $\alpha, \beta$  y del soporte de  $q$  tal que*

$$\|\tilde{Q}_4(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\alpha, \beta, q) \left( \|q\|_{L^2}^3 + \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{L^2}^2 + \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{\dot{W}^{-\varepsilon,2}} \|q\|_{L^2} \right) \quad (1.5.6)$$

$$+ \|q\|_{L^2}^2 \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2}-\varepsilon,2}} \|q\|_{\dot{W}^{\alpha,2}}, \quad (1.5.7)$$

donde  $\varepsilon := \alpha + \frac{1}{2} - \beta > 0$ .

Las siguientes proposiciones suministran el control de los términos de dispersión doble y triple en 3d.

**Proposición 1.5.3.** *Sea  $q \in W^{\alpha,2}(\mathbb{R}^3)$  una función de soporte compacto, con  $0 \leq \alpha < \frac{3}{2}$ . Entonces  $Q_2(q) \in W^{\beta,2}(\mathbb{R}^3) + C^\infty(\mathbb{R}^3)$ , para cualquier  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que  $0 \leq \beta < \alpha + \frac{1}{2}$ . Además, para todo  $\beta$  así, existe una constante  $C(\alpha, \beta, q) > 0$  que depende de  $\alpha, \beta$  y del soporte de  $q$  tal que*

$$\|\tilde{Q}_2(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\alpha, \beta, q) \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{\dot{W}^{\alpha,2}}. \quad (1.5.8)$$

**Proposición 1.5.4.** *Sea  $q \in W^{\alpha,2}(\mathbb{R}^3)$  una función de soporte compacto, con  $0 \leq \alpha < \frac{3}{2}$ . Entonces  $Q_3(q) \in W^{\beta,2}(\mathbb{R}^3) + C^\infty(\mathbb{R}^3)$ , para cualquier  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que  $0 \leq \beta < \alpha + \frac{1}{2}$ . Más aún, para todo  $\beta$  así, existe una constante  $C = C(\alpha, \beta, q) > 0$  que depende de  $\alpha, \beta$  y del soporte de  $q$  tal que*

$$\|\tilde{Q}_3(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C \left[ \|q\|_{L^2}^2 + \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{\dot{W}^{-\varepsilon,2}} + \|q\|_{L^2} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2}-\varepsilon,2}} \right] \|q\|_{\dot{W}^{\alpha,2}}, \quad (1.5.9)$$

donde  $\varepsilon := \alpha + \frac{1}{2} - \beta > 0$ .

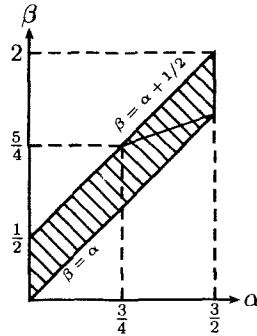


Figura 1.5. Mayor ganancia de derivada de  $q - q_B$  respecto de  $q$  en 3d.

En el capítulo 2 se tratan los términos bilineal y trilineal de la serie de Neumann-Born para los datos de *backscattering* en dimensión 2, exponiendo las técnicas analíticas que nos conducen a la demostración de la proposición 1.5.2 y el teorema 1.5.3. En cuanto al término bilineal se completan los detalles de la prueba de la estimación obtenida en [RV].

En el capítulo 3 probaremos la ganancia de media derivada de los términos  $Q_2(q)$ ,  $Q_3(q)$  y  $Q_4(q)$  respecto del potencial  $q$ , módulo una función  $C^\infty(\mathbb{R}^3)$  en dimensión 3, obteniendo así las proposiciones 1.5.3, 1.5.4, y el teorema 1.5.4. A este empeño dedicaremos las secciones 3.1, 3.2, 3.3. En este caso, simplificaremos la prueba del control de  $Q_2(q)$  y completaremos la demostración de la estimación para  $Q_3(q)$  en [RV]. Para facilitar la presentación de los argumentos hemos optado por ubicar en la sección 3.4 algunos resultados clave en el estudio de los términos cúbico y cuadrático.

En el capítulo 4 se deducen los teoremas 1.5.1 y 1.5.2 a partir de los resultados obtenidos en los dos capítulos anteriores. Para ello, en la sección 4.1 se describe la demostración de la proposición 1.5.1, así como el método que nos permite eludir el término de resto en la serie de Neumann-Born, sacrificando regularidad en las estimaciones de la citada proposición a cambio del decaimiento necesario para garantizar la convergencia de la serie. La demostración de los teoremas 1.5.1 y 1.5.2 propiamente dicha se introduce en la sección 4.2. En la sección 4.3 se compara la ganancia de regularidad de  $q - q_B$  obtenida para los datos de *backscattering* con la que se tiene partiendo de datos de ángulo fijo, como probó A. Ruiz.

Al final de la memoria dedicamos un apartado a la formulación de las conclusiones principales derivadas de este trabajo, así como algunos comentarios y conjeturas suscitados por nuestras conclusiones.

La memoria se completa con varios apéndices. En el apéndice A presentamos algunos aspectos de notación y definimos algunos conceptos matemáticos básicos del Análisis Armónico entre otros, utilizados en la memoria. En el apéndice B se exponen cuatro resultados técnicos que se utilizan continuamente en los capítulos 2 y 3. Los dos primeros se encuentran en el artículo [RV]. Como hemos comentado más arriba, en el apéndice C se demuestra una fórmula de integración por partes que permite pasar las derivadas de  $Q_j(q)$  al potencial  $q$ . También se describe la manera de aprovechar esta ventaja para permitir la reducción  $0 \leq \alpha < n/2$  a la hora de probar el teorema 1.0.1. En el apéndice D se demuestra una estimación producto para espacios de Sobolev con los pesos adecuados necesaria para deducir, junto con la estimación local de la resolvente estudiada en el apartado 1.2.1, la proposición 1.5.1. Esta estimación producto se deduce de una más general basada en el Análisis de Littlewood-Paley y en estimaciones conocidas del operador maximal de Hardy-Littlewood.

## Capítulo 2

# Dispersión doble y triple en 2d

En este capítulo se tratan los términos  $Q_2(q)$  y  $Q_3(q)$  en dimensión 2. Esta labor es fundamental para abordar la demostración de la ganancia de media derivada de la función  $q - q_B$  respecto del potencial  $q$ , módulo funciones en  $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ , en la escala de Sobolev Hilbertiana suministrada por el teorema 1.5.1.

El capítulo se desglosa en dos secciones dedicadas a demostrar la proposición 1.5.2 y el teorema 1.5.3, respectivamente. La sección 2.2 describe rigurosamente el contenido del artículo [Re] publicado recientemente en Inverse Problems.

### 2.1. Ganancia de regularidad de $Q_2(q)$ respecto de $q$

En esta sección vamos a probar en detalle la ganancia de media derivada del término cuadrático, módulo la clase  $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ , respecto del potencial que se establece en la proposición 1.5.2. Para ello enunciamos la siguiente expresión que admite el término  $Q_2(q)$  en cualquier dimensión y que se desprende de la fórmula (1.2.3) para la resolvente saliente (véase el lema C.2.1):

**Proposición 2.1.1.** *Sean  $n \geq 2$  y  $\eta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Entonces*

$$\widehat{Q_2(q)}(\eta) = v.p. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\hat{q}(\eta - \xi)\hat{q}(\xi)}{\xi \cdot (\eta - \xi)} d\xi + \frac{i\pi}{|\eta|} \int_{\Gamma(\eta)} \hat{q}(\eta - \xi)\hat{q}(\xi) d\sigma(\xi). \quad (2.1.1)$$

**Notación.** Para  $\eta \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , escribimos

$$\widehat{Q(q)}(\eta) := \frac{i\pi}{|\eta|} \int_{\Gamma(\eta)} \hat{q}(\eta - \xi)\hat{q}(\xi) d\sigma(\xi), \quad (2.1.2)$$

$$\widehat{P(q)}(\eta) := v.p. \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\hat{q}(\eta - \xi)\hat{q}(\xi)}{\xi \cdot (\eta - \xi)} d\xi. \quad (2.1.3)$$

Se divide la demostración en dos partes: primero acotaremos el término esférico que aparece en (2.1.1), y en segundo lugar, estimaremos la parte de valor principal. De hecho,

dedicamos las dos subsecciones que siguen para demostrar que

$$Q(q) \in W^{\alpha+\frac{1}{2},2}(\mathbb{R}^2), \quad P(q) \in W^{\beta,2}(\mathbb{R}^2) + C^\infty(\mathbb{R}^2),$$

para  $\alpha, \beta, q$  como en la proposición 1.5.2.

El término esférico está en un espacio de Sobolev mejor respecto del potencial sin necesidad de sumarle una función de  $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ .

El resultado fundamental para estimar el término valor principal es el lema 2.1.2, que hemos colocado en la subsección 2.1.3 de resultados clave con el propósito de facilitar la exposición de los argumentos.

### 2.1.1. Estimación del término esférico $Q(q)$

Para probar la proposición 1.5.2 empezamos por estimar el término esférico de la expresión para  $\widehat{Q_2(q)}(\eta)$  en (2.1.1). De hecho, vamos a demostrar que  $Q(q) \in W^{\beta,2}(\mathbb{R}^2)$ , para todo  $\beta \in \mathbb{R}$  con  $0 \leq \beta \leq \alpha + \frac{1}{2}$ , donde  $Q(q)$  se define en (2.1.2). Por tanto, incluyendo el caso  $\beta = \alpha + \frac{1}{2}$  vemos más de lo que necesitamos.

**Lema 2.1.1.** Sean  $\alpha_0 \in \mathbb{R}$  y  $q \in \dot{W}^{\alpha_0,2}(\mathbb{R}^2) \cap \dot{W}^{-\frac{1}{2},2}(\mathbb{R}^2)$ . Entonces si  $\beta = \alpha_0 + \frac{1}{2}$  se tiene

$$\|Q(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\alpha_0) \|q\|_{\dot{W}^{\alpha_0,2}} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}},$$

para cierta constante  $C(\alpha_0)$  que sólo depende de  $\alpha_0$ .

**Demostración.** La región del plano  $\{\xi \in \mathbb{R}^2 : |\xi| \geq |\eta - \xi|\}$ , con  $\eta \neq 0$ , es el semiplano cerrado que no contiene al origen y tiene por frontera a la mediatriz del segmento dado por  $\eta$ . Dada la simetría en  $\xi$  y  $\eta - \xi$  del integrando en la expresión (2.1.2), podemos escribir

$$\widehat{Q(q)}(\eta) = 2 \frac{i\pi}{|\eta|} \int_{\{\xi \in \Gamma(\eta) : |\xi| \geq |\eta - \xi|\}} \hat{q}(\eta - \xi) \hat{q}(\xi) d\sigma(\xi),$$

y trabajar lejos del origen. Nótese que  $\eta - \xi$  es el simétrico de  $\xi$  respecto de  $\frac{\eta}{2}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \|Q(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{Q(q)}(\eta)|^2 |\eta|^{2\beta} d\eta \\ &= 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\eta|^{-2} \left| \int_{\Gamma(\eta) \cap \{\xi \in \mathbb{R}^2 : |\xi| \geq |\eta - \xi|\}} \hat{q}(\eta - \xi) \hat{q}(\xi) d\sigma(\xi) \right|^2 |\eta|^{2\beta} d\eta \\ &= 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}^2} \left| \int_{\Gamma(\eta) \cap \{\xi \in \mathbb{R}^2 : |\xi| \geq |\eta - \xi|\}} \hat{q}(\eta - \xi) \hat{q}(\xi) d\sigma(\xi) \right|^2 |\eta|^{2\beta-2} d\eta. \end{aligned}$$

Hacemos la división  $\Gamma(\eta) \cap \{\xi \in \mathbb{R}^2 : |\xi| \geq |\eta - \xi|\} = \Gamma_+(\eta) \cup \Gamma_-(\eta)$ , donde  $\Gamma_+(\eta)$ ,  $\Gamma_-(\eta)$  son cada uno el subconjunto de  $\Gamma(\eta) \cap \{\xi \in \mathbb{R}^2 : |\xi| \geq |\eta - \xi|\}$  contenido en uno de los dos semiplanos que tienen por frontera la recta determinada por  $\eta$ .  $\Gamma_+(\eta)$  está contenido en el semiplano orientado positivamente respecto de  $\eta$  y  $\Gamma_-(\eta)$  en el otro. Analíticamente

$$\Gamma_+(\eta) = \{\xi \in \Gamma(\eta) : |\xi| \geq |\eta - \xi|, \xi \cdot \nu > 0\},$$



donde  $\nu$  denota el vector ortogonal a  $\eta$  orientado positivamente respecto de  $\eta$ , esto es,  $\nu = (-\eta_2, \eta_1)$  y  $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ . Véase la siguiente representación gráfica de  $\Gamma_+(\eta)$ :

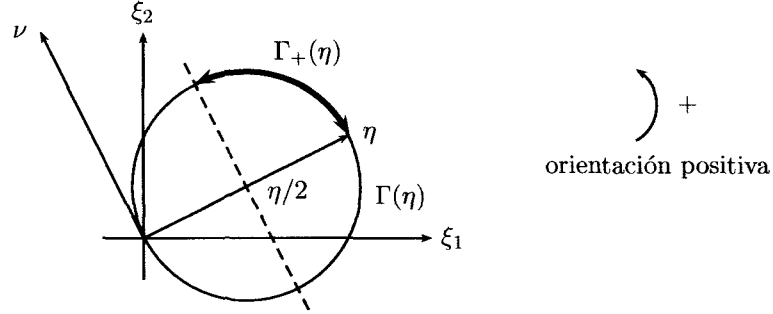


Figura 2.1. Cuadrante  $\Gamma_+(\eta)$  de la circunferencia  $\Gamma(\eta)$ .

Sean  $I_+$ ,  $I_-$  las integrales en los correspondientes cuadrantes de  $\Gamma(\eta)$ :

$$I_{\pm} := \int_{\mathbb{R}^2} \left| \int_{\Gamma_{\pm}(\eta)} \hat{q}(\eta - \xi) \hat{q}(\xi) d\sigma(\xi) \right|^2 |\eta|^{2\beta-2} d\eta.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz en  $L^2(\Gamma_+(\eta); d\sigma)$ ,

$$\begin{aligned} I_+ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left| \int_{\Gamma_+(\eta)} \hat{q}(\eta - \xi) \hat{q}(\xi) d\sigma(\xi) \right|^2 |\eta|^{2\beta-2} d\eta \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |\eta|^{2\beta-2} \int_{\Gamma_+(\eta)} |\hat{q}(\eta - \xi')|^2 d\sigma(\xi') \int_{\Gamma_+(\eta)} |\hat{q}(\xi)|^2 d\sigma(\xi) d\eta \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\Gamma_+(\eta)} |\eta|^{2\beta-2} |\hat{q}(\xi)|^2 \int_{\Gamma_+(\eta)} |\hat{q}(\eta - \xi')|^2 d\sigma(\xi') d\sigma(\xi) d\eta, \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

donde esta última integral en la medida  $d\sigma(\xi)d\eta$  tiene por dominio:

$$\left\{ (\eta, \xi) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right|^2 - \left| \frac{\eta}{2} \right|^2 = \xi \cdot (\xi - \eta) = 0, |\xi| \geq |\eta - \xi|, \xi \cdot \nu > 0 \right\}.$$

El lema B.2 nos permite cambiar el orden de integración en la integral (2.1.4) y escribir

$$\begin{aligned} I_+ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\Lambda_-(\xi)} |\eta|^{2\beta-2} |\hat{q}(\xi)|^2 \int_{\Gamma_+(\eta)} |\hat{q}(\eta - \xi')|^2 d\sigma(\xi') \frac{|\eta|}{|\xi|} d\sigma(\eta) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{q}(\xi)|^2 \int_{\Lambda_-(\xi)} \int_{\Gamma_+(\eta)} |\hat{q}(\eta - \xi')|^2 d\sigma(\xi') |\eta|^{2\beta-1} d\sigma(\eta) \frac{d\xi}{|\xi|}, \end{aligned}$$

donde, para cada  $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ,  $\Lambda_-(\xi)$  denota el segmento contenido en la recta  $\Lambda(\xi)$  tal que uno de sus extremos es  $\xi$ , es de longitud  $|\xi|$  y que está orientado negativamente respecto de  $\xi$ . Analíticamente

$$\Lambda_-(\xi) = \{\eta \in \mathbb{R}^2 : \xi \in \Gamma_+(\eta)\} = \{\eta \in \mathbb{R}^2 : \xi \cdot (\xi - \eta) = 0, |\xi| \geq |\xi - \eta|, \xi \cdot \nu > 0\}$$

$$= \{\eta \in \Lambda(\xi) : |\xi| \geq |\xi - \eta|, \xi \cdot \nu > 0\}.$$

Nos damos cuenta de que la condición  $\xi \cdot \nu > 0$  obliga a situarse a  $\eta$  en el citado segmento orientado negativamente respecto de  $\xi$ . Sea ahora

$$F_+(\xi) := \int_{\Lambda_-(\xi)} \int_{\Gamma_+(\eta)} |\hat{q}(\eta - \xi')|^2 d\sigma(\xi') |\eta|^{2\beta-1} d\sigma(\eta),$$

para cada  $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Se verifica la siguiente

**Afirmación 2.1.1.** *Para todo  $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  y  $\beta \in \mathbb{R}$  existe una constante  $C(\beta) > 0$  que sólo depende de  $\beta$  tal que*

$$|F_+(\xi)| \leq C(\beta) \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}^2 |\xi|^{2\beta}.$$

**Demostración.** Suponemos que  $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  está fijo y establecemos el sistema ortonormal  $\{e_1, e_2\}$  orientado positivamente, donde  $\xi = |\xi|e_1$ . Escribimos  $\eta = |\xi|e_1 - se_2$ , con  $0 \leq s \leq |\xi|$ , parametrizando así el punto  $\eta \in \Lambda_-(\xi)$  por  $s$ . Ya que la longitud de  $\Lambda_-(\xi)$  es  $|\xi|$  tiene que ser  $s \leq |\xi|$ . Sabiendo que  $d\sigma(\eta) = ds$  y denotando  $h(s) := |\eta| = (|\xi|^2 + s^2)^{\frac{1}{2}}$ ,

$$F_+(\xi) = \int_0^{|\xi|} \int_{\Gamma_+(\eta(s))} |\hat{q}(\xi - se_2 - \xi')|^2 d\sigma(\xi') h(s)^{2\beta-1} ds.$$

A continuación, para cada  $s$  fijo, parametrizamos el punto  $\xi' \in \Gamma_+(\eta(s))$  por el ángulo  $\theta$  que forman  $\xi' - \frac{\eta(s)}{2}$  y  $e_1$ :

$$\begin{aligned} \xi' &= \frac{\eta(s)}{2} + \frac{h(s)}{2} (\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2) \\ &= \frac{1}{2} [(|\xi| + h(s) \cos \theta) e_1 + (-s + h(s) \sin \theta) e_2], \end{aligned}$$

donde  $-\theta_0 \leq \theta \leq -\theta_0 + \frac{\pi}{2}$ , con  $\theta_0$  el ángulo que forman  $\xi$  y  $\eta(s)$ , que cumple

$$\tan \theta_0 = \frac{|\eta(s) - \xi|}{|\xi|} = \frac{s}{|\xi|}.$$

Se tiene

$$\begin{aligned} \eta(s) - \xi' &= \eta(s) - \frac{\eta(s)}{2} - \frac{h(s)}{2} (\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2) \\ &= \frac{1}{2} (|\xi| - h(s) \cos \theta) e_1 - \frac{1}{2} (s + h(s) \sin \theta) e_2. \end{aligned}$$

Recordando que el determinante de la matriz ortogonal que transforma el sistema de referencia canónico en  $\{e_1, e_2\}$  tiene valor absoluto uno, se cumple que

$$d\sigma(\xi') = \left( \left( \frac{-1}{2} h(s) \sin \theta \right)^2 + \left( \frac{1}{2} h(s) \cos \theta \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\theta = \frac{h(s)}{2} d\theta.$$

Y podemos escribir

$$F_+(\xi) = \frac{1}{2} \int_0^{|\xi|} h(s)^{2\beta} \int_{-\theta_0}^{-\theta_0 + \frac{\pi}{2}} \left| \hat{q} \left( \frac{1}{2} (|\xi| - h(s) \cos \theta) e_1 - \frac{1}{2} (s + h(s) \sin \theta) e_2 \right) \right|^2 d\theta ds. \quad (2.1.5)$$

Consideramos el cambio de variables de  $(s, \theta)$  a  $y = (y_1, y_2)$  dado por

$$y = \eta(s) - \xi'(s, \theta) = \frac{1}{2} (|\xi| - h(s) \cos \theta) e_1 - \frac{1}{2} (s + h(s) \sin \theta) e_2.$$

Se tiene

$$\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(s, \theta)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} \frac{s}{h(s)} \cos \theta & \frac{1}{2} h(s) \sin \theta \\ -\frac{1}{2} (1 + \frac{s}{h(s)} \sin \theta) & -\frac{1}{2} h(s) \cos \theta \end{vmatrix} = \frac{1}{4} (s + h(s) \sin \theta) = -\frac{1}{2} y_2,$$

de donde  $ds d\theta = \frac{2}{|y_2|} dy$ .

Omitamos ahora las dependencias paramétricas para tener más claridad. Sea  $\gamma$  el ángulo que forman  $\xi$  y  $\xi'$ . Dado que  $\eta \in \Lambda_-(\xi)$ , se tiene que  $\xi$  y  $\xi'$  pertenecen a  $\Gamma_+(\eta)$ , luego  $|\gamma|$  no puede superar el ángulo entre  $\eta$  y el otro extremo del cuadrante de circunferencia  $\Gamma_+(\eta)$ , ángulo que vale  $\frac{\pi}{4}$ . Así,  $|\gamma| \leq \frac{\pi}{4}$ . Es evidente que  $\gamma$  concide con el ángulo entre  $\xi' - \eta$  y  $\xi - \eta$ , luego  $|y_2| = |y| |\cos \gamma| \geq |y| \frac{\sqrt{2}}{2}$ , y  $|y_2| \sim |y|$ . Como consecuencia de que  $0 \leq s \leq |\xi|$  se tiene  $h(s) \sim |\xi|$ . Por todo ello, la expresión (2.1.5) se puede acotar por

$$C(\beta) |\xi|^{2\beta} \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{q}(y)|^2 \frac{dy}{|y|},$$

y queda probada la afirmación 2.1.1. □

Por tanto, nos queda

$$I_+ \leq \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{q}(\xi)|^2 F_+(\xi) \frac{d\xi}{|\xi|} \leq C(\beta) \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2}, 2}}^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{q}(\xi)|^2 |\xi|^{2\beta-1} d\xi = C(\beta) \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2}, 2}}^2 \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2}, 2}}^2.$$

La estimación del término

$$I_- := \int_{\mathbb{R}^2} \left| \int_{\Gamma_-(\eta)} \hat{q}(\eta - \xi) \hat{q}(\xi) d\sigma(\xi) \right|^2 |\eta|^{2\beta-2} d\eta$$

se hace de manera análoga llegando también a que

$$I_- \leq C(\beta) \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2}, 2}}^2 \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2}, 2}}^2.$$

Indiquemos las modificaciones que se llevan a cabo. La expresión análoga a (2.1.4) ha de ser la misma substituyendo  $\Gamma_+(\eta)$  por  $\Gamma_-(\eta)$ , donde ahora se integra en la subvariedad de  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$

$$\left\{ (\eta, \xi) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right|^2 - \left| \frac{\eta}{2} \right|^2 = \xi \cdot (\xi - \eta) = 0, |\xi| \geq |\eta - \xi|, \xi \cdot \nu < 0 \right\}.$$

Después se aplica el lema B.2 y se obtiene

$$I_- \leq \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{q}(\xi)|^2 \int_{\Lambda_+(\xi)} \int_{\Gamma_-(\eta)} |\hat{q}(\eta - \xi')|^2 d\sigma(\xi') |\eta|^{2\beta-1} d\sigma(\eta) \frac{d\xi}{|\xi|},$$

donde, para cada  $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ,  $\Lambda_+(\xi)$  denota el segmento contenido en la recta  $\Lambda(\xi)$  tal que uno de sus extremos es  $\xi$ , es de longitud  $|\xi|$  y que está orientado positivamente respecto de  $\xi$ . Analíticamente

$$\Lambda_+(\xi) = \{\eta \in \Lambda(\xi) : |\xi| \geq |\xi - \eta|, \xi \cdot \nu < 0\}.$$

Definimos, para  $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , la función  $F_-(\xi)$  igual que  $F_+(\xi)$  substituyendo los dominio de integración  $\Lambda_-(\xi)$  por  $\Lambda_+(\xi)$  y  $\Gamma_-(\eta)$  por  $\Gamma_+(\eta)$ . Prácticamente la prueba de que

$$F_-(\xi) \leq C(\beta) \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}^2 |\xi|^{2\beta},$$

para todo  $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , es idéntica a la de la afirmación 2.1.1 salvo las siguientes apreciaciones. La forma en que se expresa  $\eta \in \Lambda_+(\xi)$  en función del parámetro  $s = |\xi - \eta| \in [0, |\xi|]$ , viene dada por  $\eta = |\xi|e_1 + se_2$ . El parámetro  $\theta$  para  $\xi' \in \Gamma_-(\eta)$ , ahora cumple  $\theta_0 - \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \theta_0$ . La expresión para  $\eta - \xi'$  en función de  $\theta$  y  $s$  es

$$\eta - \xi' = \frac{1}{2} (|\xi| - h(s) \cos \theta) e_1 + \frac{1}{2} (s - h(s) \sin \theta) e_2,$$

donde  $h(s) = (|\xi|^2 + s^2)^{\frac{1}{2}}$ , lo cual provoca que en el cambio de variables de  $(s, \theta)$  a  $y = y_1 e_1 + y_2 e_2$ , la expresión de  $y_2$  se modifique como  $\frac{1}{2}(s - h(s) \sin \theta)$ . Concluimos pues que

$$\|Q(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\beta) \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}. \quad (2.1.6)$$

Podemos elegir  $\beta = \alpha_0 + \frac{1}{2}$  ya que el término de la derecha de la desigualdad en (2.1.6) es finito por hipótesis ( $q \in \dot{W}^{\alpha_0,2}(\mathbb{R}^2) \cap \dot{W}^{-\frac{1}{2},2}$ ) y esto termina la prueba del lema 2.1.1.  $\square$

Veamos ahora que el lema 2.1.1 y el lema B.1 implican que el término  $Q(q)$  dado por (2.1.2) pertenece al espacio  $W^{\beta,2}(\mathbb{R}^2)$ , para todo  $\beta \leq \alpha + \frac{1}{2}$ . Dado que el soporte de  $q$  es compacto y se verifica  $0 < \frac{1}{2} < \frac{n}{2}$ , para  $n = 2$ , en virtud del lema B.1,

$$\|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \leq C \|q\|_{L^2} < +\infty.$$

Para  $\alpha \geq 0$ ,  $W^{\alpha,2}(\mathbb{R}^2) \subset \dot{W}^{\alpha,2}(\mathbb{R}^2)$ . De este modo,  $q \in \dot{W}^{\alpha,2}(\mathbb{R}^2) \cap \dot{W}^{-\frac{1}{2},2}(\mathbb{R}^2)$ . Aplicando el lema 2.1.1 al caso  $\alpha_0 = \alpha$  obtenemos

$$\|Q(q)\|_{\dot{W}^{\alpha+\frac{1}{2},2}} \leq C(\alpha) \|q\|_{\dot{W}^{\alpha,2}} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}, \quad (2.1.7)$$

de donde se desprende que  $Q(q) \in \dot{W}^{\alpha+\frac{1}{2},2}(\mathbb{R}^2)$ . Asimismo,  $q \in \dot{W}^{-\frac{1}{2},2}(\mathbb{R}^2)$  implica que  $Q(q) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ , por el lema 2.1.1 en el caso  $\alpha_0 = -\frac{1}{2}$ . Luego  $Q(q) \in \dot{W}^{\alpha+\frac{1}{2},2}(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2) =$

$W^{\alpha+\frac{1}{2},2}(\mathbb{R}^2)$ .

Finalmente, queremos observar que estando en las hipótesis de la proposición 1.5.2, para todo  $\beta \in \mathbb{R}$  con  $\beta < \alpha + \frac{1}{2}$  se cumple

$$\|\mathcal{F}^{-1} \chi \mathcal{F} Q(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\alpha) \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{\dot{W}^{\alpha,2}}. \quad (2.1.8)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \int_{|\eta|>10} |\eta|^{2\beta} |\widehat{Q(q)}(\eta)|^2 d\eta &= \int_{|\eta|>10} |\eta|^{2(\alpha+1/2)} |\eta|^{-2\varepsilon} |\widehat{Q(q)}(\eta)|^2 d\eta \\ &\leq \int_{|\eta|>10} |\eta|^{2(\alpha+1/2)} |\widehat{Q(q)}(\eta)|^2 d\eta \leq \|Q(q)\|_{\dot{W}^{\alpha+1/2,2}}^2, \end{aligned}$$

donde  $\varepsilon := \alpha + \frac{1}{2} - \beta > 0$  y  $|\eta|^{-2\varepsilon} \leq 1$ , y la estimación (2.1.7) nos conduce a (2.1.8).

### 2.1.2. Estimación del término valor principal $P(q)$

Vamos a controlar el término valor principal de la expresión (2.1.1) para  $\widehat{Q_2(q)}(\eta)$ . Queremos demostrar que  $P(q) \in W^{\beta,2}(\mathbb{R}^2) + C^\infty(\mathbb{R}^2)$ , para todo  $\beta$  tal que  $0 \leq \beta < \alpha + \frac{1}{2}$  estando  $\alpha$  y  $q$  en las hipótesis de la proposición 1.5.2, donde  $P(q)$  se define en (2.1.3).

Por la simetría del integrando en (2.1.3) respecto de  $\xi$  y  $\eta - \xi$ , se cumple

$$\widehat{P(q)}(\eta) = 2 \text{ v.p. } \int_{\{|\xi|>|\eta-\xi|\}} \frac{\hat{q}(\eta-\xi)\hat{q}(\xi)}{\xi \cdot (\eta-\xi)} d\xi.$$

Las singularidades de la integral (2.1.3) son los puntos  $\xi$  del plano tales que  $\xi \cdot (\eta - \xi) = 0$ , esto es, el conjunto  $\Gamma(\eta)$ . En primer lugar, dividimos el plano en un anillo  $\Gamma_\infty^*(\eta)$  que contiene a la circunferencia de singularidades  $\Gamma(\eta)$  y su complementario. Seguidamente descomponemos el anillo  $\Gamma_\infty^*(\eta)$  en coronas diádicas tratando de estimar los términos integrales correspondientes a esas coronas. De hecho, consideramos la partición de  $\mathbb{R}^2$  introducida en (A.0.3) añadiendo la condición  $|\xi| \geq |\eta - \xi|$ , y para  $j_0$  el menor entero tal que  $j_0 \geq 1 - \log_2(\delta_0)$ , donde  $\delta_0$  aparece en el enunciado del lema 2.1.2. Manteniendo las notaciones de la expresión (A.0.3), definimos

$$\Gamma_{j_0}^*(\eta) := \{\xi \in \Gamma_{j_0}(\eta) : |\xi| \geq |\eta - \xi|\}, \quad \Gamma_j^*(\eta) := \{\xi \in \Gamma_j(\eta) : |\xi| \geq |\eta - \xi|\}, \quad (2.1.9)$$

$$\tilde{\Gamma}_\infty^*(\eta) := \left\{ \xi \in \mathbb{R}^2 : \left| \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right| - \frac{|\eta|}{2} \right| \leq 2^{-N-1}|\eta|, |\xi| \geq |\eta - \xi| \right\}, \quad (2.1.10)$$

$$\Gamma_\infty^*(\eta) := \left\{ \xi \in \mathbb{R}^2 : \left| \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right| - \frac{|\eta|}{2} \right| \leq 1, |\xi| \geq |\eta - \xi| \right\}. \quad (2.1.11)$$

con  $j_0 \leq j \leq N$  y  $|\eta| \geq 2^{j_0}$ . Nótese que  $j \leq N \Leftrightarrow 2^j \leq |\eta|$ . Así, también definimos para  $j_0 \leq j < \infty$

$$\widehat{P_j(q)}(\eta) := \chi_{[2^j, +\infty)}(|\eta|) \int_{\Gamma_j^*(\eta)} \frac{\hat{q}(\xi)\hat{q}(\eta-\xi)}{\xi \cdot (\eta-\xi)} d\xi,$$

y empleamos la notación obvia para  $\widehat{P_{j_0^-}(q)}(\eta)$  y  $\widehat{P_\infty(q)}(\eta)$  que corresponden a las regiones  $\Gamma_{j_0^-}^*(\eta)$ ,  $\tilde{\Gamma}_\infty^*(\eta)$ , respectivamente, sin multiplicar por la función característica. Tenemos que

$$\{\xi \in \mathbb{R}^2 : |\xi| \geq |\eta - \xi|\} = \bigcup_{j=j_0}^N \Gamma_j^*(\eta) \cup \tilde{\Gamma}_\infty^*(\eta) \cup \Gamma_{j_0^-}^*(\eta),$$

para todo  $\eta \in \mathbb{R}^2$  con  $|\eta| \geq 2^{j_0}$ , donde las uniones son disjuntas. Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \widehat{P(q)}(\eta) &= \widehat{P_{j_0^-}(q)}(\eta) + \sum_{j=j_0}^N \widehat{P_j(q)}(\eta) + \widehat{P_\infty(q)}(\eta) \\ &= \widehat{P_{j_0^-}(q)}(\eta) + \sum_{j=j_0}^{+\infty} \widehat{P_j(q)}(\eta) + \widehat{P_\infty(q)}(\eta). \end{aligned}$$

Demostraremos que en las hipótesis de la proposición 1.5.2 se cumple

$$\|\mathcal{F}^{-1}(\chi^* \widehat{P(q)})\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\alpha, \beta, q) \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{\dot{W}^{\alpha,2}},$$

para cierta constante  $C(\alpha, \beta, q)$  que sólo depende de  $\alpha, \beta$  y el soporte de  $q$  y tomando  $\chi^*$  con un  $C_0$  suficientemente grande que en particular debe verificar que  $C_0 > \max\{2^{j_0}, \frac{1}{\delta_0}, 10\}$ , para el  $\delta_0$  del lema 2.1.2.

En primer lugar, probemos la estimación

$$\|\mathcal{F}^{-1}[\chi \widehat{P_{j_0^-}(q)}]\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\alpha, \beta, \delta_0) \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{\dot{W}^{\alpha,2}}, \quad (2.1.12)$$

para cierta constante  $C(\alpha, \beta, \delta_0)$  que sólo depende de  $\alpha, \beta$  y  $\delta_0$ .

Supongamos que  $\xi \in \Gamma_{j_0^-}^*(\eta)$ . Tenemos

$$\begin{aligned} |\xi \cdot (\eta - \xi)| &= \left| \left( \frac{|\eta|}{2} \right)^2 - \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right|^2 \right| \\ &= \left( \frac{|\eta|}{2} + \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right| \right) \left| \frac{|\eta|}{2} - \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right| \right| \\ &\geq \frac{|\eta|}{2} 2^{-j_0+1} |\eta| = 2^{-j_0} |\eta|^2, \end{aligned}$$

donde la desigualdad se debe a que  $\left| \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right| - \frac{|\eta|}{2} \right| > 2^{-j_0+1} |\eta|$ . El conjunto  $\Gamma_{j_0^-}^*(\eta)$  consta de una parte acotada  $\Gamma_{j_0^-}^1(\eta)$  y otra que no está acotada  $\Gamma_{j_0^-}^2(\eta)$ :

$$\begin{aligned} \Gamma_{j_0^-}^1(\eta) &:= \left\{ \xi \in \mathbb{R}^2 : |\xi| \geq |\eta - \xi|, \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right| < (2^{-1} - 2^{-j_0+1}) |\eta| \right\}, \\ \Gamma_{j_0^-}^2(\eta) &:= \left\{ \xi \in \mathbb{R}^2 : |\xi| \geq |\eta - \xi|, \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right| > (2^{-1} + 2^{-j_0+1}) |\eta| \right\}. \end{aligned}$$

Escribimos, entonces  $\widehat{P_{j_0^-}^k(q)}(\eta) = \widehat{P_{j_0^-}^1(q)}(\eta) + \widehat{P_{j_0^-}^2(q)}(\eta)$ , donde para  $k = 1, 2$

$$\widehat{P_{j_0^-}^k(q)}(\eta) := \int_{\Gamma_{j_0^-}^k(\eta)} \frac{\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \xi)}{\xi \cdot (\eta - \xi)} d\xi.$$

Se cumple que

$$\begin{aligned}
& \|\mathcal{F}^{-1}[\chi_{\widehat{P_{j_0}^1}(q)}]\|_{\dot{W}^{\beta,2}}^2 \leq \int_{|\eta|>10} |\eta|^{2\beta} |\widehat{P_{j_0}^1}(q)(\eta)|^2 d\eta \\
& \leq 2^{2j_0} \int_{|\eta|>10} |\eta|^{2\beta} \left( \int_{\Gamma_{j_0}^1(\eta)} \frac{|\hat{q}(\xi)\hat{q}(\eta-\xi)|}{|\eta|^2} d\xi \right)^2 d\eta \\
& = 2^{2j_0} \int_{|\eta|>10} |\eta|^{2\beta-4} \left( \int_{\Gamma_{j_0}^1(\eta)} |\hat{q}(\xi)\hat{q}(\eta-\xi)| d\xi \right)^2 d\eta \\
& \leq 2^{2j_0} \int_{|\eta|>10} |\eta|^{2\beta-4} \int_{\Gamma_{j_0}^1(\eta)} |\hat{q}(\xi)\hat{q}(\eta-\xi)|^2 d\xi \mathcal{L}^2(\Gamma_{j_0}^1(\eta)) d\eta \tag{2.1.13}
\end{aligned}$$

$$\leq 2^{2j_0} C_{j_0}^2 \pi \int_{|\eta|>10} |\eta|^{2\beta-2} \int_{\Gamma_{j_0}^1(\eta)} |\hat{q}(\xi)\hat{q}(\eta-\xi)|^2 d\xi d\eta \tag{2.1.14}$$

$$\leq 2^{2j_0} C_{j_0}^2 \pi \int_{|\xi|>1} \int_{\{\eta: |\xi-\frac{\eta}{2}| < C_{j_0}|\eta|, |\eta-\xi| < |\xi|\}} |\eta|^{2\beta-2} |\hat{q}(\xi)\hat{q}(\eta-\xi)|^2 d\eta d\xi, \tag{2.1.15}$$

donde  $C_{j_0} := \frac{1}{2}(1 - 2^{-j_0+2})$ . La desigualdad en (2.1.13) se deduce de la desigualdad de Cauchy-Schwartz. En el paso de (2.1.13) a (2.1.14) téngase en cuenta que

$$\mathcal{L}^2(\Gamma_{j_0}^1(\eta)) \leq \mathcal{L}^2(B(\eta/2; C_{j_0}|\eta|)) = C_{j_0}^2 \pi |\eta|^2.$$

Si  $\xi \in \Gamma_{j_0}^1(\eta)$  se verifica que  $|\xi| \sim |\eta|$ , ya que  $|\eta| < 2|\xi|$  y

$$|\xi| \leq \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right| + \frac{|\eta|}{2} < C_{j_0}|\eta| + \frac{|\eta|}{2} = (1 - 2^{-j_0+1})|\eta|.$$

También  $|\eta - \xi| \leq \frac{|\eta|}{2} + \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right| < (1 - 2^{-j_0+1})|\eta| < |\eta|$ , por lo que

$$\frac{1}{|\eta|} < \frac{1}{|\eta - \xi|},$$

desprendiéndose de todo ello que

$$|\eta|^{2\beta-2} = |\eta|^{2\beta-1} \frac{1}{|\eta|} \leq C(\beta, j_0) |\xi|^{2\beta-1} \frac{1}{|\eta - \xi|}.$$

De este modo, pasamos de (2.1.15) a

$$\begin{aligned}
& \leq C \int_{|\xi|>1} \int_{\{\eta: \xi \in \Gamma_{j_0}^1(\eta)\}} |\xi|^{2\beta-1} |\hat{q}(\xi)|^2 \frac{|\hat{q}(\eta-\xi)|^2}{|\eta-\xi|} d\eta d\xi \\
& \leq C \int_{|\xi|>1} |\xi|^{2\beta-1} |\hat{q}(\xi)|^2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\hat{q}(\eta)|^2}{|\eta|} d\eta d\xi \\
& \leq C \int_{|\xi|>1} |\xi|^{2\alpha} |\hat{q}(\xi)|^2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\hat{q}(\eta)|^2}{|\eta|} d\eta d\xi
\end{aligned}$$

$$\leq C \|q\|_{\dot{W}^{\alpha,2}}^2 \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}^2,$$

para todo  $\beta < \alpha + \frac{1}{2}$ , donde  $C$  sólo depende de  $\beta$  y  $j_0$ . Obtenemos que

$$\|\mathcal{F}^{-1}[\chi \widehat{P_{j_0}^1}(q)]\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\beta, j_0) \|q\|_{\dot{W}^{\alpha,2}} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}. \quad (2.1.16)$$

Vamos con el término  $\widehat{P_{j_0}^2}(q)(\eta)$ . Supongamos que  $\xi \in \Gamma_{j_0}^2(\eta)$ . Se cumple  $|\eta| < 2|\xi|$  y

$$|\xi \cdot (\eta - \xi)| = \left( \frac{|\eta|}{2} + \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right| \right) \left| \frac{|\eta|}{2} - \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right| \right|,$$

donde  $\frac{|\eta|}{2} + \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right| \geq \frac{|\eta|}{2} + |\xi| - \frac{|\eta|}{2} = |\xi|$ , y

$$\left| \xi - \frac{\eta}{2} \right| - \frac{|\eta|}{2} > (2^{-1} + 2^{-j_0+1})|\eta| - \frac{|\eta|}{2} = 2^{-j_0+1}|\eta|.$$

Luego

$$\begin{aligned} |\xi \cdot (\eta - \xi)| &> |\xi| 2^{-j_0+1}|\eta| = 2^{-j_0+1} |\xi|^{\frac{1}{2}} |\xi|^{\frac{1}{2}} |\eta| > 2^{-j_0+1} |\xi|^{\frac{1}{2}} |\eta - \xi|^{\frac{1}{2}} |\eta| \\ &> 2^{-j_0+\frac{1}{2}} |\eta|^{\frac{1}{2}} |\eta - \xi|^{\frac{1}{2}} |\eta| = C |\eta|^{\frac{3}{2}} |\eta - \xi|^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Resumiendo, si  $\xi \in \Gamma_{j_0}^2(\eta)$ ,  $|\xi \cdot (\eta - \xi)| > C |\eta|^{\frac{3}{2}} |\eta - \xi|^{\frac{1}{2}}$ . Tenemos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}^{-1}[\chi \widehat{P_{j_0}^2}(q)]\|_{\dot{W}^{\beta,2}}^2 &\leq \int_{|\eta|>10} |\eta|^{2\beta} |\widehat{P_{j_0}^2}(q)(\eta)|^2 d\eta \\ &\leq C \int_{|\eta|>10} |\eta|^{2\beta} \left( \int_{\Gamma_{j_0}^2(\eta)} \frac{|\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \xi)|}{|\eta|^{\frac{3}{2}} |\eta - \xi|^{\frac{1}{2}}} d\xi \right)^2 d\eta \\ &\leq C \int_{|\eta|>10} |\eta|^{2\beta} \int_{\Gamma_{j_0}^2(\eta)} \frac{|\hat{q}(\xi)|^2}{|\eta|^3} d\xi \int_{\Gamma_{j_0}^2(\eta)} \frac{|\hat{q}(\eta - \xi')|^2}{|\eta - \xi'|} d\xi' d\eta \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

$$\begin{aligned} &\leq C \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}^2 \int_{|\eta|>10} |\eta|^{2\beta} \int_{\Gamma_{j_0}^2(\eta)} \frac{|\hat{q}(\xi)|^2}{|\eta|^3} d\xi d\eta \\ &\leq C \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}^2 \int_{|\eta|>10} |\eta|^{2\beta-3} \int_{|\eta|<2|\xi|} |\hat{q}(\xi)|^2 d\xi d\eta \\ &\leq C \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}^2 \int_{|\xi|>1} |\hat{q}(\xi)|^2 \int_{10<|\eta|<2|\xi|} |\eta|^{2\beta-3} d\eta d\xi. \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

La desigualdad en (2.1.17) se debe al desigualdad de Cauchy-Schwartz en el espacio de Hilbert  $L^2(\Gamma_{j_0}^2(\eta); \mathcal{L}^2)$ . Para un  $\xi$  fijo, pasando a coordenadas polares se tiene

$$\begin{aligned} \int_{10<|\eta|<2|\xi|} |\eta|^{2\beta-3} d\eta &= \int_{10<|\eta|<2|\xi|} |\eta|^{2\beta-3+2\epsilon} |\eta|^{-2\epsilon} d\eta \\ &\leq \int_{10<|\eta|<2|\xi|} |\eta|^{2\beta-3+2\epsilon} d\eta = 2\pi \int_{10}^{2|\xi|} r^{2\beta-3+2\epsilon} r dr \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{2\pi}{2\beta-1+2\varepsilon} 2^{2\beta-1+2\varepsilon} (|\xi|^{2\beta-1+2\varepsilon} - 5^{2\beta-1+2\varepsilon}) \\
&< \frac{2\pi}{2\beta-1+2\varepsilon} 2^{2\beta-1+2\varepsilon} |\xi|^{2\beta-1+2\varepsilon} = \frac{\pi}{\alpha} 2^{2\alpha} |\xi|^{2\alpha},
\end{aligned}$$

con  $\varepsilon := (\alpha + \frac{1}{2}) - \beta > 0$  y suponiendo  $\alpha > 0$ . Acotamos (2.1.18) por

$$C \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}^2 \int_{|\xi|>1} |\hat{q}(\xi)|^2 |\xi|^{2\alpha} d\xi \leq C \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}^2 \|q\|_{\dot{W}^{\alpha,2}}^2. \quad (2.1.19)$$

En el caso  $\alpha = 0$  escribimos

$$\int_{10<|\eta|<2|\xi|} |\eta|^{2\beta-3} d\eta = 2\pi \int_{10}^{2|\xi|} r^{2\beta-2} dr \leq \frac{2\pi}{2\beta-1} 2^{2\beta-1} |\xi|^{2\beta-1},$$

donde  $2\beta-1 \neq 0$  y sigue siendo cierta la expresión (2.1.19), ya que  $\beta < \alpha + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  implica que  $|\xi|^{2\beta-1} \leq 1 = |\xi|^{2\alpha}$  si  $|\xi| > 1$ . Por tanto, existe una constante  $C(\alpha, \beta, j_0)$  que sólo depende de  $\alpha, \beta$  y  $j_0$  tal que

$$\|\mathcal{F}^{-1}[\chi \widehat{P_{j_0}^2}(q)]\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\alpha, \beta, j_0) \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{\dot{W}^{\alpha,2}}. \quad (2.1.20)$$

De (2.1.16) y (2.1.20) deducimos (2.1.12).

### Estimación de los términos de las coronas.

Por la desigualdad de Minkowski,

$$\left\| \mathcal{F}^{-1} \left( \chi \sum_{j=j_0}^{\infty} \widehat{P_j}(q) \right) \right\|_{\dot{W}^{\beta,2}} = \left\| \sum_{j=j_0}^{\infty} \mathcal{F}^{-1} \left( \chi \widehat{P_j}(q) \right) \right\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq \sum_{j=j_0}^{\infty} \left\| \mathcal{F}^{-1} \left( \chi \widehat{P_j}(q) \right) \right\|_{\dot{W}^{\beta,2}}.$$

Si  $j \geq j_0$  y  $\xi \in \Gamma_j^*(\eta)$ ,

$$|\xi \cdot (\eta - \xi)| = \left( \frac{|\eta|}{2} + \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right| \right) \left| \frac{|\eta|}{2} - \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right| \right| \geq \frac{|\eta|}{2} 2^{-j-1} |\eta| = 2^{-j-2} |\eta|^2,$$

de donde deducimos que

$$\begin{aligned}
|\widehat{P_j}(q)(\eta)| &\leq 2^{j+2} \chi_{(2^j, +\infty)}(|\eta|) \int_{\Gamma_j^*(\eta)} \frac{|\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \xi)|}{|\eta|^2} d\xi \\
&\leq 2^{j+2} \chi_{(2^{j-1}, +\infty)}(|\eta|) \int_{\Gamma_j^*(\eta)} \frac{|\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \xi)|}{|\eta|^2} d\xi.
\end{aligned}$$

Además,

$$\Gamma_j^*(\eta) \subset \{ \xi \in \mathbb{R}^2 : \left| \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right| - \frac{|\eta|}{2} \right| < 2^{-j+1} |\eta|, |\xi| > |\eta - \xi| \},$$

por lo que aplicando el lema clave 2.1.2 al caso  $\delta = 2^{-j+1}$ , sabemos que existen  $\gamma > 1$  y  $C(\alpha, \beta, \delta_0) > 0$  tales que para todo entero  $j$  verificando  $\delta = 2^{-j+1} < \delta_0$  (esto es,  $j \geq j_0$ ), tenemos

$$\left\| \mathcal{F}^{-1} \left( \chi \widehat{P_j}(q) \right) \right\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\alpha, \beta, \delta_0) 2^{j+2} (2^{-j+1})^\gamma \|q\|_{\dot{W}^{\alpha,2}} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}.$$

Podemos escribir

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} \left\| \mathcal{F}^{-1} \left( \chi \widehat{P_j(q)} \right) \right\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\alpha, \beta, \delta_0) \|q\|_{\dot{W}^{\alpha,2}} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}, \quad (2.1.21)$$

observando que la serie  $\sum_{j=j_0}^{\infty} 2^{-j(\gamma-1)}$  converge puesto que  $\gamma > 1$ .

### Estimación de la parte singular próxima a $\Gamma(\eta)$ .

Vamos a probar la estimación

$$\|\mathcal{F}^{-1}(\chi^* \widehat{P_{\infty}(q)})\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\alpha, \beta, \delta_0, q) \|q\|_{\dot{W}^{\alpha,2}} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}, \quad (2.1.22)$$

donde elegimos  $\chi^*$  con  $C_0 > 10$  y  $C_0 > \frac{1}{\delta_0}$ , para el  $\delta_0$  del lema 2.1.2, y  $C(\alpha, \beta, \delta_0, q)$  es una constante que sólo depende de  $\alpha, \beta, \delta_0$  y del soporte de  $q$ . Hasta ahora hemos evitado la región singular  $\Gamma(\eta)$ . El dominio  $\Gamma_{\infty}^*(\eta)$  la contiene. Para acotar el valor principal de la integral en  $\Gamma_{\infty}^*(\eta)$ , integramos en dos anillos a una distancia radial  $\varepsilon > 0$  de la circunferencia singular y pasamos al límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Escribimos:

$$\widehat{P_{\infty}(q)}(\eta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{\Gamma_{\varepsilon}^+(\eta)} + \int_{\Gamma_{\varepsilon}^-(\eta)} \right) \frac{\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \xi)}{\xi \cdot (\eta - \xi)} d\xi, \quad (2.1.23)$$

donde

$$\Gamma_{\varepsilon}^+(\eta) := \left\{ \xi \in \mathbb{R}^2 : \varepsilon < \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right| - \frac{|\eta|}{2} < 2^{-N-1} |\eta|, |\xi| > |\eta - \xi| \right\}, \quad y \quad (2.1.24)$$

$$\Gamma_{\varepsilon}^-(\eta) := \left\{ \xi \in \mathbb{R}^2 : \varepsilon < \frac{|\eta|}{2} - \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right| < 2^{-N-1} |\eta|, |\xi| > |\eta - \xi| \right\}. \quad (2.1.25)$$

Consideremos el cambio de variables  $\xi' = \phi(\xi)$ ,  $\xi \in \Gamma_{\varepsilon}^-(\eta)$ , que envía  $\xi$  a su simétrico  $\xi' \in \Gamma_{\varepsilon}^+(\eta)$  respecto de  $\Gamma(\eta)$  en la dirección radial con centro en  $\frac{\eta}{2}$ . La recta que pasa por  $\xi$  y tiene la dirección del vector  $\xi - \frac{\eta}{2}$  corta a  $\Gamma(\eta)$  en un punto  $A$ . La distancia  $d$  entre  $\xi$  y  $A$  vale  $d = \frac{|\eta|}{2} - \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right|$ . Luego,

$$\xi' = \phi(\xi) = \xi + 2d \frac{\xi - \frac{\eta}{2}}{\left| \xi - \frac{\eta}{2} \right|} = \eta - \xi + |\eta| \frac{\xi - \frac{\eta}{2}}{\left| \xi - \frac{\eta}{2} \right|}. \quad (2.1.26)$$

Es fácil comprobar que

$$\left| \phi(\xi) - \frac{\eta}{2} \right| - \frac{|\eta|}{2} = - \left( \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right| - \frac{|\eta|}{2} \right). \quad (2.1.27)$$

Haciendo  $\phi(\xi) = (\phi_1(\xi), \phi_2(\xi))$ , donde

$$\phi_i(\xi) = \eta_i - \xi_i + |\eta| \frac{\xi_i - \frac{\eta_i}{2}}{\left| \xi - \frac{\eta}{2} \right|},$$

para  $i = 1, 2$ , se verifica

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_1(\xi)}{\partial \xi_1} &= -1 + |\eta| \frac{\left| \xi - \frac{\eta}{2} \right|^2 - \left| \xi_1 - \frac{\eta_1}{2} \right|^2}{\left| \xi - \frac{\eta}{2} \right|^3}, \\ \frac{\partial \phi_1(\xi)}{\partial \xi_2} &= \frac{\partial \phi_2(\xi)}{\partial \xi_1} = \frac{-|\eta|}{\left| \xi - \frac{\eta}{2} \right|^3} \left( \xi_1 - \frac{\eta_1}{2} \right) \left( \xi_2 - \frac{\eta_2}{2} \right), \\ \frac{\partial \phi_2(\xi)}{\partial \xi_2} &= -1 + |\eta| \frac{\left| \xi - \frac{\eta}{2} \right|^2 - \left| \xi_2 - \frac{\eta_2}{2} \right|^2}{\left| \xi - \frac{\eta}{2} \right|^3}.\end{aligned}$$

Para todo  $\xi \in \Gamma_\varepsilon^-(\eta)$ ,  $|D\phi(\xi)|$  es el valor absoluto del determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1(\xi)}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \phi_1(\xi)}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial \phi_2(\xi)}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \phi_2(\xi)}{\partial \xi_2} \end{vmatrix} = 1 - \frac{|\eta|}{\left| \xi - \frac{\eta}{2} \right|}.$$

Dado que  $\left| \xi - \frac{\eta}{2} \right| < \frac{|\eta|}{2} - \varepsilon < |\eta|$ , podemos escribir

$$\begin{aligned}|D\phi(\xi)| &= \frac{|\eta|}{\left| \xi - \frac{\eta}{2} \right|} - 1 = \frac{|\eta| - \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right|}{\left| \xi - \frac{\eta}{2} \right|} \\ &= \frac{\left| \xi - \frac{\eta}{2} \right| + |\eta| - 2\left| \xi - \frac{\eta}{2} \right|}{\left| \xi - \frac{\eta}{2} \right|} = 1 + 2 \frac{\frac{|\eta|}{2} - \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right|}{\left| \xi - \frac{\eta}{2} \right|}.\end{aligned}$$

Esto es,

$$|D\phi(\xi)| = 1 + 2 \frac{\frac{|\eta|}{2} - \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right|}{\left| \xi - \frac{\eta}{2} \right|}. \quad (2.1.28)$$

Además, sabiendo que  $\left| \xi - \frac{\eta}{2} \right| < \frac{|\eta|}{2}$ ,

$$\begin{aligned}|\phi(\xi) - \xi| &= \left| \eta - 2\xi + \frac{|\eta|}{\left| \xi - \frac{\eta}{2} \right|} \left( \xi - \frac{\eta}{2} \right) \right| = \left| -2\left( \xi - \frac{\eta}{2} \right) + \frac{|\eta|}{\left| \xi - \frac{\eta}{2} \right|} \left( \xi - \frac{\eta}{2} \right) \right| \\ &= \left| \frac{|\eta|}{\left| \xi - \frac{\eta}{2} \right|} - 2 \right| \cdot \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right| = \frac{|\eta| - 2\left| \xi - \frac{\eta}{2} \right|}{\left| \xi - \frac{\eta}{2} \right|} \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right| = 2 \left( \frac{|\eta|}{2} - \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right| \right).\end{aligned}$$

Es decir,

$$|\phi(\xi) - \xi| = 2 \left( \frac{|\eta|}{2} - \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right| \right). \quad (2.1.29)$$

Aplicando la transformación  $\xi' = \phi(\xi)$  a la primera integral en (2.1.23), obtenemos

$$\int_{\Gamma_\varepsilon^+(\eta)} \frac{\hat{q}(\xi') \hat{q}(\eta - \xi')}{\xi' \cdot (\eta - \xi')} d\xi' = \int_{\Gamma_\varepsilon^-(\eta)} \frac{\hat{q}(\phi(\xi)) \hat{q}(\eta - \phi(\xi))}{\phi(\xi) \cdot (\eta - \phi(\xi))} |D\phi(\xi)| d\xi.$$

Sabemos que:

$$\begin{aligned}\phi(\xi) \cdot (\eta - \phi(\xi)) &= \left( \frac{|\eta|}{2} + \left| \phi(\xi) - \frac{\eta}{2} \right| \right) \cdot \left( \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right| - \frac{|\eta|}{2} \right), \\ \xi \cdot (\eta - \xi) &= \left| \frac{\eta}{2} \right|^2 - \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right|^2 = \left( \frac{|\eta|}{2} + \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right| \right) \cdot \left( \frac{|\eta|}{2} - \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right| \right).\end{aligned}\quad (2.1.30)$$

Se cumple

$$\begin{aligned}\widehat{P_\infty(q)}(\eta) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Gamma_\varepsilon^-(\eta)} \left[ \frac{\hat{q}(\phi(\xi))\hat{q}(\eta - \phi(\xi))}{\phi(\xi) \cdot (\eta - \phi(\xi))} |D\phi(\xi)| + \frac{\hat{q}(\xi)\hat{q}(\eta - \xi)}{\xi \cdot (\eta - \xi)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\hat{q}(\xi)\hat{q}(\eta - \xi)}{\left| \phi(\xi) - \frac{\eta}{2} \right|^2 - \left| \frac{\eta}{2} \right|^2} |D\phi(\xi)| - \frac{\hat{q}(\xi)\hat{q}(\eta - \xi)}{\left| \phi(\xi) - \frac{\eta}{2} \right|^2 - \left| \frac{\eta}{2} \right|^2} |D\phi(\xi)| \right] d\xi \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_{\Gamma_\varepsilon^-(\eta)} \frac{\hat{q}(\phi(\xi))\hat{q}(\eta - \phi(\xi)) - \hat{q}(\eta - \xi)\hat{q}(\xi)}{\left| \frac{\eta}{2} \right|^2 - \left| \phi(\xi) - \frac{\eta}{2} \right|^2} |D\phi(\xi)| d\xi \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Gamma_\varepsilon^-(\eta)} \frac{\hat{q}(\xi)\hat{q}(\eta - \xi)}{\left| \phi(\xi) - \frac{\eta}{2} \right|^2 - \left| \frac{\eta}{2} \right|^2} |D\phi(\xi)| d\xi + \int_{\Gamma_\varepsilon^-(\eta)} \frac{\hat{q}(\xi)\hat{q}(\eta - \xi)}{\xi \cdot (\eta - \xi)} d\xi \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_{\Gamma_\varepsilon^-(\eta)} \frac{\hat{q}(\phi(\xi))\hat{q}(\eta - \phi(\xi)) - \hat{q}(\eta - \xi)\hat{q}(\xi)}{\left| \frac{\eta}{2} \right|^2 - \left| \phi(\xi) - \frac{\eta}{2} \right|^2} |D\phi(\xi)| d\xi \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Gamma_\varepsilon^-(\eta)} \frac{\hat{q}(\xi)\hat{q}(\eta - \xi)}{\left| \phi(\xi) - \frac{\eta}{2} \right|^2 - \left| \frac{\eta}{2} \right|^2} d\xi \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_{\Gamma_\varepsilon^-(\eta)} \frac{\hat{q}(\xi)\hat{q}(\eta - \xi)}{\left| \frac{\eta}{2} \right|^2 - \left| \phi(\xi) - \frac{\eta}{2} \right|^2} \frac{\left| \frac{\eta}{2} \right| - \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right|}{\left| \xi - \frac{\eta}{2} \right|} d\xi + \int_{\Gamma_\varepsilon^-(\eta)} \frac{\hat{q}(\xi)\hat{q}(\eta - \xi)}{\xi \cdot (\eta - \xi)} d\xi \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_{\Gamma_\varepsilon^-(\eta)} \frac{\hat{q}(\phi(\xi))\hat{q}(\eta - \phi(\xi)) - \hat{q}(\eta - \xi)\hat{q}(\xi)}{\left| \frac{\eta}{2} \right|^2 - \left| \phi(\xi) - \frac{\eta}{2} \right|^2} |D\phi(\xi)| d\xi \right. \\ &\quad \left. - 2 \int_{\Gamma_\varepsilon^-(\eta)} \frac{\hat{q}(\xi)\hat{q}(\eta - \xi)}{\left( \left| \frac{\eta}{2} \right| + \left| \phi(\xi) - \frac{\eta}{2} \right| \right) \cdot \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right|} d\xi \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_{\Gamma_\varepsilon^-(\eta)} \frac{\hat{q}(\xi)\hat{q}(\eta - \xi)}{\left( \left| \frac{\eta}{2} \right| + \left| \phi(\xi) - \frac{\eta}{2} \right| \right) \left( \frac{|\eta|}{2} + \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right| \right)} d\xi \right] \\ &=: \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (I_1^\varepsilon + I_2^\varepsilon + I_3^\varepsilon),\end{aligned}$$

donde la tercera igualdad se debe a (2.1.28), y la cuarta se desprende de que, gracias a (2.1.27) y (2.1.30):

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\left| \frac{\eta}{2} \right|^2 - \left| \phi(\xi) - \frac{\eta}{2} \right|^2} + \frac{1}{\xi \cdot (\eta - \xi)} \\ &= \frac{-1}{\left( \left| \frac{\eta}{2} \right| + \left| \phi(\xi) - \frac{\eta}{2} \right| \right) \left( \left| \frac{\eta}{2} \right| - \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right| \right)} + \frac{1}{\left( \left| \frac{\eta}{2} \right| + \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right| \right) \left( \left| \frac{\eta}{2} \right| - \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right| \right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-\left|\frac{\eta}{2}\right| - \left|\xi - \frac{\eta}{2}\right| + \left|\frac{\eta}{2}\right| + |\phi(\xi) - \frac{\eta}{2}|}{\left(\left|\frac{\eta}{2}\right| + |\phi(\xi) - \frac{\eta}{2}|\right) \left(\left|\frac{\eta}{2}\right| + \left|\xi - \frac{\eta}{2}\right|\right) \left(\left|\frac{\eta}{2}\right| - \left|\xi - \frac{\eta}{2}\right|\right)} \\
&= \frac{|\eta| - 2\left|\xi - \frac{\eta}{2}\right|}{\left(\left|\frac{\eta}{2}\right| + |\phi(\xi) - \frac{\eta}{2}|\right) \left(\left|\frac{\eta}{2}\right| + \left|\xi - \frac{\eta}{2}\right|\right) \left(\left|\frac{\eta}{2}\right| - \left|\xi - \frac{\eta}{2}\right|\right)} \\
&= \frac{2}{\left(\left|\frac{\eta}{2}\right| + |\phi(\xi) - \frac{\eta}{2}|\right) \left(\left|\frac{\eta}{2}\right| + \left|\xi - \frac{\eta}{2}\right|\right)}.
\end{aligned}$$

Para  $|\eta| > C_0$ , los términos  $|I_2^\varepsilon|, |I_3^\varepsilon|$  pueden acotarse superiormente por un término de la forma

$$\widehat{J(q)}(\eta) := C \chi^*(\eta) \int_{\Gamma_\infty^-(\eta)} \frac{|\hat{q}(\xi)\hat{q}(\eta - \xi)|}{|\eta|^2} d\xi, \quad (2.1.31)$$

donde

$$\Gamma_\infty^*(\eta) := \left\{ \xi \in \mathbb{R}^2 : \left| \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right| - \frac{|\eta|}{2} \right| \leq 1, |\xi| \geq |\eta - \xi| \right\}.$$

Veámoslo. Sean  $\xi \in \Gamma_\varepsilon^-(\eta)$  y  $\eta \in \mathbb{R}^2$  tal que  $|\eta| > C_0$ . Sabiendo que  $2^{-N-1}|\eta| \leq 1$ , se verifica

$$\left| \xi - \frac{\eta}{2} \right| > \frac{|\eta|}{2} - 2^{-N-1}|\eta| \geq \frac{|\eta|}{2} - 1 > \frac{|\eta|}{2} - \frac{|\eta|}{4} = \frac{|\eta|}{4}.$$

También,  $\frac{|\eta|}{2} + |\phi(\xi) - \frac{\eta}{2}| > \frac{|\eta|}{2}$ . Por lo que

$$\left( \frac{|\eta|}{2} + \left| \phi(\xi) - \frac{\eta}{2} \right| \right) \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right| \geq \frac{1}{8} |\eta|^2,$$

y  $|I_2^\varepsilon|$  queda acotado superiormente por (2.1.31), si  $|\eta| > C_0$ . Es claro que  $\frac{1}{4}|\eta|^2$  es una cota inferior del denominador del integrando en  $I_3^\varepsilon$ , de donde se deduce que  $|I_3^\varepsilon|$  está acotado superiormente por (2.1.31).

Recordemos que  $\chi^*$  denota a la función característica del complementario de la bola centrada en el origen de radio  $C_0 > 0$ . Si elegimos  $C_0 > \frac{1}{\delta_0}$  (para el  $\delta_0$  del lema 2.1.2) entonces se verifica que  $\widehat{J(q)}(\eta) \leq \mathcal{F}(Q_+^\delta(q))(\eta)$ , para  $\delta = 1/C_0$ , siguiendo la notación del lema 2.1.2 (ya que  $1 = \frac{1}{|\eta|}|\eta| < \frac{1}{C_0}|\eta|$ , y  $\Gamma_\infty^*(\eta) \subset \Gamma_{\frac{1}{C_0}}^*(\eta)$ ; véase la notación de la nota 2.1.1). De este modo, podemos aplicar el lema 2.1.2 en el caso  $\delta = \frac{1}{C_0} (< \delta_0)$  y obtener la existencia de una constante  $C(\alpha, \beta, \delta_0) > 0$  sólo dependiente de  $\alpha, \beta$  y  $\delta_0$  tal que

$$\|J(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\alpha, \beta, \delta_0) \|q\|_{\dot{W}^{\alpha,2}} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}. \quad (2.1.32)$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
I_1^\varepsilon &= \int_{\Gamma_\varepsilon^-(\eta)} \frac{\hat{q}(\phi(\xi))\hat{q}(\eta - \phi(\xi)) - \hat{q}(\eta - \xi)\hat{q}(\xi)}{\left|\frac{\eta}{2}\right|^2 - \left|\phi(\xi) - \frac{\eta}{2}\right|^2} |D\phi(\xi)| d\xi \\
&= \int_{\Gamma_\varepsilon^-(\eta)} \frac{\hat{q}(\phi(\xi))\hat{q}(\eta - \phi(\xi)) - \hat{q}(\eta - \xi)\hat{q}(\xi)}{\left|\frac{\eta}{2}\right|^2 - \left|\phi(\xi) - \frac{\eta}{2}\right|^2} d\xi
\end{aligned}$$

$$+ 2 \int_{\Gamma_{\varepsilon}^{-}(\eta)} \frac{\hat{q}(\phi(\xi))\hat{q}(\eta - \phi(\xi)) - \hat{q}(\eta - \xi)\hat{q}(\xi)}{\left|\frac{\eta}{2}\right|^2 - \left|\phi(\xi) - \frac{\eta}{2}\right|^2} \frac{\left|\frac{\eta}{2}\right| - \left|\xi - \frac{\eta}{2}\right|}{\left|\xi - \frac{\eta}{2}\right|} d\xi.$$

Puesto que  $\xi \in \Gamma_{\varepsilon}^{-}(\eta)$  y suponiendo que  $|\eta| > C_0 \geq 10$ , se cumple que

$$\begin{aligned} \left|\frac{\eta}{2}\right| - \left|\xi - \frac{\eta}{2}\right| &< 2^{-N-1}|\eta| \leq 1, \text{ y} \\ \left|\xi - \frac{\eta}{2}\right| &> \frac{|\eta|}{2} - 2^{-N-1}|\eta| \geq \frac{|\eta|}{2} - 1 > 4, \end{aligned}$$

por lo que

$$0 < \frac{\left|\frac{\eta}{2}\right| - \left|\xi - \frac{\eta}{2}\right|}{\left|\xi - \frac{\eta}{2}\right|} < 1.$$

Esto es,

$$\begin{aligned} |I_1^{\varepsilon}| &\leq 3 \int_{\Gamma_{\varepsilon}^{-}(\eta)} \frac{|\hat{q}(\phi(\xi))\hat{q}(\eta - \phi(\xi)) - \hat{q}(\eta - \xi)\hat{q}(\xi)|}{\left|\frac{\eta}{2}\right|^2 - \left|\phi(\xi) - \frac{\eta}{2}\right|^2} d\xi \\ &\leq 3 \int_{\Gamma_{\varepsilon}^{-}(\eta)} \frac{|\hat{q}(\phi(\xi)) [\hat{q}(\eta - \phi(\xi)) - \hat{q}(\eta - \xi)]|}{\left|\frac{\eta}{2}\right|^2 - \left|\phi(\xi) - \frac{\eta}{2}\right|^2} d\xi \\ &\quad + 3 \int_{\Gamma_{\varepsilon}^{-}(\eta)} \frac{|\hat{q}(\eta - \xi) [\hat{q}(\phi(\xi)) - \hat{q}(\xi)]|}{\left|\frac{\eta}{2}\right|^2 - \left|\phi(\xi) - \frac{\eta}{2}\right|^2} d\xi \\ &=: \widehat{J_1(q)}(\eta) + \widehat{J_2(q)}(\eta). \end{aligned}$$

El término  $\widehat{J_1(q)}(\eta)$  puede estimarse a partir de la estimación de Calderón (véase la sección §2 en [H]):

$$|g(x) - g(y)| \leq C (M(\nabla g)(x) + M(\nabla g)(y)) |x - y|, \text{ c.t.p.,} \quad (2.1.33)$$

suponiendo que  $g \in \dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n) := \{h \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \nabla h \in L^p(\mathbb{R}^n)\}$ , para algún  $p > 1$ . En particular,

$$|\hat{q}(\eta - \phi(\xi)) - \hat{q}(\eta - \xi)| \leq C (M(\nabla \hat{q})(\eta - \phi(\xi)) + M(\nabla \hat{q})(\eta - \xi)) |\phi(\xi) - \xi|,$$

y aplicando (2.1.29), para  $|\eta| > C_0$  nos queda

$$\begin{aligned} |\widehat{J_1(q)}(\eta)| &\leq C \chi^*(\eta) \int_{\Gamma_{\varepsilon}^{-}(\eta)} \frac{[M(\nabla \hat{q})(\eta - \phi(\xi)) + M(\nabla \hat{q})(\eta - \xi)] |\hat{q}(\phi(\xi))|}{\left|\phi(\xi) - \frac{\eta}{2}\right| + \left|\frac{\eta}{2}\right|} d\xi \\ &=: \widehat{J_1^1(q)}(\eta) + \widehat{J_1^2(q)}(\eta). \end{aligned}$$

Sea  $\hat{f} := M(\nabla \hat{q})$ . Haciendo  $\xi' = \phi(\xi)$ , se tiene  $\xi = \phi^{-1}(\xi') = \eta - \xi' + |\eta| \frac{\xi' - \frac{\eta}{2}}{|\xi' - \frac{\eta}{2}|}$ , y

$$|D\phi^{-1}(\xi')| = \left|1 + 2 \frac{\left|\frac{\eta}{2}\right| - \left|\xi' - \frac{\eta}{2}\right|}{\left|\xi' - \frac{\eta}{2}\right|}\right|.$$

Se cumple

$$\begin{aligned} \widehat{J_1^1(q)}(\eta) &= \chi^*(\eta) \int_{\Gamma_\varepsilon^+(\eta)} \frac{\hat{f}(\eta - \xi') |\hat{q}(\xi')|}{\left| \xi' - \frac{\eta}{2} \right| + \left| \frac{\eta}{2} \right|} |D\phi^{-1}(\xi')| d\xi' \\ &\leq \chi^*(\eta) \left( \int_{\Gamma_\varepsilon^+(\eta)} \frac{\hat{f}(\eta - \xi') |\hat{q}(\xi')|}{\left| \xi' - \frac{\eta}{2} \right| + \left| \frac{\eta}{2} \right|} d\xi' \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_{\Gamma_\varepsilon^+(\eta)} \frac{\hat{f}(\eta - \xi') |\hat{q}(\xi')|}{\left| \xi' - \frac{\eta}{2} \right| + \left| \frac{\eta}{2} \right|} \frac{\left| \xi' - \frac{\eta}{2} \right| - \frac{|\eta|}{2}}{\left| \xi' - \frac{\eta}{2} \right|} d\xi' \right) \\ &\leq C \chi^*(\eta) \widehat{K(q)}(\eta), \end{aligned}$$

donde  $\widehat{K(q)}(\eta) := \int_{\Gamma_\infty^*(\eta)} \frac{\hat{f}(\eta - \xi') |\hat{q}(\xi')|}{|\eta|} d\xi'$ . En virtud de los lemas 2.1.3 y B.4, se verifica

$$\|\mathcal{F}^{-1} \chi^* \mathcal{F} K(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C \|q\|_{\dot{W}^{\alpha,2}} \|f\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \leq C(\alpha, \beta, q) \|q\|_{\dot{W}^{\alpha,2}} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}},$$

donde  $C(\alpha, \beta, q)$  sólo depende de  $\alpha, \beta$  y de  $\text{spt } q$ . Por tanto,

$$\|J_1^1(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\alpha, \beta, q) \|q\|_{\dot{W}^{\alpha,2}} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}. \quad (2.1.34)$$

Tenemos que

$$\widehat{J_1^2(q)}(\eta) \leq C \chi^*(\eta) \int_{\Gamma_\infty^*(\eta)} \frac{M(\nabla \hat{q})(\eta - \xi) M\hat{q}(\xi)}{|\eta|} d\xi,$$

ya que si  $\xi \in \Gamma_\varepsilon^-(\eta)$ , entonces  $|\phi(\xi) - \xi| < 2$ , y por el lema B.1,  $|\hat{q}(\phi(\xi))| \leq CM\hat{q}(\xi)$  para cierta constante  $C > 0$  que depende de  $\text{spt } q$ . En virtud del lema 2.1.3 aplicado a las funciones  $\mathcal{F}^{-1}(M\hat{q})$  y  $f$ , y por el lema B.4 (recordando que  $0 \leq \alpha < 1$ ), obtenemos

$$\|J_1^2(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C \|\mathcal{F}^{-1}(M\hat{q})\|_{\dot{W}^{\alpha,2}} \|f\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \leq C(\alpha, \beta, q) \|q\|_{\dot{W}^{\alpha,2}} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}.$$

Esta última estimación y (2.1.34) nos conducen a

$$\|J_1(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\alpha, \beta, q) \|q\|_{\dot{W}^{\alpha,2}} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}.$$

De manera análoga, la estimación de Calderón, el lema B.1 que nos garantiza que

$$|\hat{q}(\eta - \xi)| \leq CM\hat{q}(\eta - \phi(\xi))$$

(puesto que si  $\xi \in \Gamma_\varepsilon^-(\eta)$ , entonces  $|\phi(\xi) - \xi| < 2$ ), y los lemas 2.1.3 y B.4 son las herramientas que nos permiten obtener

$$\|J_2(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\alpha, \beta, q) \|q\|_{\dot{W}^{\alpha,2}} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}.$$

Se cumple

$$\chi^*(\eta) |\widehat{P_\infty(q)}(\eta)| = \chi^*(\eta) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} |I_1^\varepsilon + I_2^\varepsilon + I_3^\varepsilon| \leq C [\widehat{J_1(q)}(\eta) + \widehat{J_2(q)}(\eta) + \widehat{J(q)}(\eta)],$$

y concluimos (2.1.22)

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}^{-1}(\chi^* \widehat{P_\infty(q)})\|_{\dot{W}^{\beta,2}} &\leq C [\|J_1(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} + \|J_2(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} + \|J(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}] \\ &\leq C(\alpha, \beta, \delta_0, q) \|q\|_{\dot{W}^{\alpha,2}} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}. \end{aligned}$$

De las estimaciones (2.1.12), (2.1.21), (2.1.22) deducimos que para todo  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que  $0 \leq \beta < \alpha + \frac{1}{2}$ , se cumple

$$\|\mathcal{F}^{-1} \chi^* \mathcal{F} P(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\alpha, \beta, q) \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{\dot{W}^{\alpha,2}}, \quad (2.1.35)$$

donde  $\chi^* \leq \chi$  ya que  $C_0 > 10$ . Esta estimación (2.1.35) y la estimación (2.1.8) para el término esférico garantizan la estimación (1.5.4) de la tesis de la proposición 1.5.2.

Como el lector habrá apreciado, a la hora de acotar la norma del término  $P(q)$  ha surgido la necesidad de restringir las frecuencias al complementario de una bola centrada en el origen, exigiéndose que la ganancia de  $\frac{1}{2}^-$  derivada respecto de  $q$  sea módulo una función de  $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ . En efecto, se tiene:

$$P(q) = \mathcal{F}^{-1} \left( [1 - \chi^*] \widehat{P(q)} \right) + \mathcal{F}^{-1} \left( \chi^* \widehat{P(q)} \right),$$

donde la primera función está en  $C^\infty(\mathbb{R}^2)$  por ser la transformada inversa de una función de soporte compacto. La estimación (2.1.35) nos dice que  $\mathcal{F}^{-1} \chi^* \mathcal{F} P(q) \in \dot{W}^{\beta,2}(\mathbb{R}^2)$  si  $0 \leq \beta < \alpha + \frac{1}{2}$ ,  $0 \leq \alpha < 1$ . Dicha estimación es cierta para  $\beta = 0$  y  $\mathcal{F}^{-1} \chi^* \mathcal{F} P(q) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ .

### 2.1.3. Resultados clave

En este apartado se estudian los resultados clave que se aplican en la estimación del término de valor principal  $P(q)$  que aparece en la expresión de  $\widehat{Q_2(q)}(\eta)$  y se define en (2.1.3). A tal efecto, el lema 2.1.2 constituye el resultado principal y se demuestra minuciosamente. El lema 2.1.3 es una variación de éste.

**Lema 2.1.2.** Sea  $\eta \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Denotamos

$$\widehat{Q_+^\delta(q)}(\eta) := \chi_{(\delta^{-1}, \infty)}(|\eta|) \int_{\Gamma_\delta^+(\eta)} \frac{|\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \xi)|}{|\eta|^2} d\xi, \quad (2.1.36)$$

donde  $\Gamma_\delta^+(\eta) := \{\xi \in \mathbb{R}^2 : \|\xi - \frac{\eta}{2}\| - \|\frac{\eta}{2}\| < \delta \|\eta\|, \|\xi\| > \|\eta - \xi\|, \xi \cdot \nu > 0\}$ , con  $\nu = (-\eta_2, \eta_1)$  y  $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ . Supongamos que  $\alpha$  y  $\beta$  son números reales verificando que  $\alpha > \beta - \frac{1}{2}$ . Entonces existen  $\delta_0 > 0$  y  $\gamma > 1$  tales que, para todo  $\delta \in \mathbb{R}$  con  $0 < \delta < \delta_0$ ,

$$\|\widehat{Q_+^\delta(q)}\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\alpha, \beta, \delta_0) \delta^\gamma \|q\|_{\dot{W}^{\alpha,2}} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}},$$

para cierta constante  $C(\alpha, \beta, \delta_0)$  sólo dependiente de  $\alpha, \beta, \delta_0$  y con  $\gamma = \gamma(\alpha, \beta)$ .



**Nota 2.1.1.** Este resultado también es válido si en lugar de integrar en el lado de Fourier en  $\Gamma_\delta^+(\eta)$ , lo hacemos en el dominio

$$\Gamma_\delta^*(\eta) := \left\{ \xi \in \mathbb{R}^2 : \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right| - \left| \frac{\eta}{2} \right| < \delta|\eta|, \quad |\xi| > |\eta - \xi| \right\},$$

esto es, toda la intersección del anillo de centro  $\frac{\eta}{2}$  y radios  $\frac{|\eta|}{2} \pm \delta|\eta|$  con el semiplano alejado del origen  $\{\xi : |\xi| > |\eta - \xi|\}$ .

**Lema 2.1.3.** Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$  tales que  $\beta \leq \alpha + \frac{1}{2}$ , y  $f, g \in W^{\alpha,2}(\mathbb{R}^2) \cap \dot{W}^{\frac{1}{2},2}(\mathbb{R}^2)$ . Escribimos

$$\mathcal{F}(Q_*(f, g))(\eta) := \chi^*(\eta) \frac{1}{|\eta|} \int_{\Gamma_\infty^*(\eta)} |\hat{f}(\xi) \hat{g}(\eta - \xi)| d\sigma(\xi),$$

donde  $\Gamma_\infty^*(\eta) = \{\xi \in \mathbb{R}^2 : ||\xi - \eta/2| - |\eta|/2| \leq 1, |\xi| \geq |\eta - \xi|\}$  y  $\chi^*$  se elige con  $C_0 > 200$ . Entonces existe una constante  $C(\alpha, \beta) > 0$  sólo dependiente de  $\alpha, \beta$  tal que

$$\|Q_*(f, g)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\alpha, \beta) \|f\|_{\dot{W}^{\alpha,2}} \|g\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}.$$

**Nota 2.1.2.** Cómparese este lema con el lema 2.1.2 substituyendo las ocurrencias de  $\hat{q}$  que se aplican a  $\xi$  y  $\eta - \xi$  por dos funciones  $\hat{f}, \hat{g}$  cuando moralmente consideramos  $\delta \sim |\eta|^{-1}$ . Heurísticamente tratamos un término similar con el anillo con  $\delta$  del orden de  $|\eta|^{-1}$ , y en la estimación afirmamos la misma ganancia de derivada que en el lema 2.1.2.

### Demostración del lema 2.1.2

Sea  $B := B(\eta, 16\delta|\eta|)$ . Escribimos  $\widehat{Q_+^\delta(q)}(\eta) = \widehat{I_0}(\eta) + \widehat{I_1}(\eta)$ , donde

$$\widehat{I_0}(\eta) := \chi_{(\delta^{-1}, \infty)}(|\eta|) \int_{\Gamma_\delta^+(\eta) \cap B} \frac{|\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \xi)|}{|\eta|^2} d\xi,$$

y

$$\widehat{I_1}(\eta) := \chi_{(\delta^{-1}, \infty)}(|\eta|) \int_{\Gamma_\delta^+(\eta) \setminus B} \frac{|\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \xi)|}{|\eta|^2} d\xi.$$

Se tiene

$$\begin{aligned} \|I_1\|_{\dot{W}^{\beta,2}}^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} |\eta|^{2\beta} |\widehat{I_1}(\eta)|^2 d\eta = \int_{|\eta| > \delta^{-1}} |\eta|^{2\beta-4} \left( \int_{\Gamma_\delta^+(\eta) \setminus B} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \xi)| d\xi \right)^2 d\eta \\ &\leq \int_{|\eta| > \delta^{-1}} |\eta|^{2\beta-4} \int_{\Gamma_\delta^+(\eta) \setminus B} |\hat{q}(\eta - \xi')|^2 d\xi' \int_{\Gamma_\delta^+(\eta) \setminus B} |\hat{q}(\xi)|^2 d\xi d\eta \quad (2.1.37) \\ &= \int_{|\eta| > \delta^{-1}} \int_{\Gamma_\delta^+(\eta) \setminus B} |\eta|^{2\beta-4} \int_{\Gamma_\delta^+(\eta) \setminus B} |\hat{q}(\eta - \xi')|^2 d\xi' |\hat{q}(\xi)|^2 d\xi d\eta, \end{aligned}$$

donde la desigualdad de Cauchy-Schwartz en el espacio de Hilbert  $L^2(\Gamma_\delta^+(\eta) \setminus B; d\xi)$  explica la desigualdad en (2.1.37). Para  $\xi \in \Gamma_\delta^+(\eta)$ ,  $|\xi|$  y  $|\eta|$  son comparables para  $\delta$  suficientemente pequeño, es decir, si  $\delta < \delta_0$ , para una constante  $\delta_0 > 0$  que se fijará más adelante. De hecho,

$\frac{|\eta|}{2} \leq |\xi| \leq (\delta_0 + 1)|\eta|$ . En efecto: la condición  $|\xi| > |\eta - \xi|$  nos dice que  $|\eta| < 2|\xi|$ , y por otra parte,  $|\xi| \leq \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right| + \frac{|\eta|}{2} < (\delta + \frac{1}{2})|\eta| + \frac{|\eta|}{2} < (\delta_0 + 1)|\eta|$ , puesto que se cumple que  $\left| \xi - \frac{\eta}{2} \right| - \frac{|\eta|}{2} < \delta|\eta|$ , por estar  $\xi$  en el anillo

$$\Gamma_\delta(\eta) := \left\{ \xi \in \mathbb{R}^2 : \left| \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right| - \frac{|\eta|}{2} \right| < \delta|\eta| \right\}.$$

Nótese que si  $\beta > 2$ ,  $|\eta|^{2\beta-4} < 2^{2\beta-4}|\xi|^{2\beta-4}$ , mientras que si  $\beta \leq 2$ ,  $|\eta|^{2\beta-4} \leq (\frac{1}{1+\delta_0})^{2\beta-4}|\xi|^{2\beta-4}$ .

Para cierta constante  $C > 0$  que depende de  $\beta, \delta_0$ , y cambiando el orden de integración en  $\xi$  y  $\eta$  en virtud del teorema de Fubini, se verifica

$$\begin{aligned} \|I_1\|_{\dot{W}^{\beta,2}}^2 &\leq C \int_{|\eta|>\delta^{-1}} \int_{\Gamma_\delta^+(\eta) \setminus B} |\xi|^{2\beta-4} \int_{\Gamma_\delta^+(\eta) \setminus B} |\hat{q}(\eta - \xi')|^2 d\xi' |\hat{q}(\xi)|^2 d\xi d\eta \\ &\leq C \int_{|\xi|>(2\delta)^{-1}} |\xi|^{2\beta-4} |\hat{q}(\xi)|^2 \int_{\Lambda_\delta^-(\xi)} \int_{\Gamma_\delta^+(\eta) \setminus B} |\hat{q}(\eta - \xi')|^2 d\xi' d\eta d\xi, \end{aligned} \quad (2.1.38)$$

donde  $\Lambda_\delta^-(\xi) := \{\eta \in \mathbb{R}^2 : \xi \in \Gamma_\delta^+(\eta) \setminus B\}$ . Sea, para cada  $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$F_+^\delta(\xi) := \int_{\Lambda_\delta^-(\xi)} \int_{\Gamma_\delta^+(\eta) \setminus B} |\hat{q}(\eta - \xi')|^2 d\xi' d\eta.$$

Entonces se cumple

**Afirmación 2.1.2.**

$$F_+^\delta(\xi) \leq C|\xi|^3 \delta^2 \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}},$$

para todo  $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ .

**Demostración.** Se tiene que, para  $\delta_0$  suficientemente pequeño,  $\Lambda_\delta^-(\xi)$  está contenido en

$$E_\delta(\xi) := \{\eta \in \mathbb{R}^2 : \left| (\eta - \xi) \cdot \frac{\xi}{|\xi|} \right| \leq 4\delta|\xi|, \ 16\delta|\xi| < \xi^\perp \cdot (\eta - \xi) < 2|\xi|\},$$

siendo  $\xi^\perp$  el vector unitario ortogonal a  $\xi$  orientado negativamente respecto de  $\xi$ . Sea  $\{e_1, e_2\}$  un sistema de referencia ortonormal orientado positivamente tal que  $\xi = |\xi|e_1$ . Para  $\eta \in \Lambda_\delta^-(\xi) \subset E_\delta(\xi)$ , podemos escribir  $\eta = re_1 - se_2$ , donde  $|\xi|(1 - 4\delta) \leq r \leq |\xi|(1 + 4\delta)$  y  $16\delta|\xi| \leq s \leq 2|\xi|$ . Sea  $h(r, s) := |\eta| = (r^2 + s^2)^{\frac{1}{2}}$ . Consideramos el cambio de variables de  $\eta = (\eta_1, \eta_2)$  en  $(r, s)$  donde podemos suponer que  $\eta_1 = r$  y  $\eta_2 = -s$ , puesto que el giro en el plano que transforma el sistema canónico de referencia en  $\{e_1, e_2\}$  tiene determinante uno. Luego,  $\left| \frac{\partial(\eta_1, \eta_2)}{\partial(r, s)} \right| = 1$ . Se cumple

$$F_+^\delta(\xi) \leq \int_{16\delta|\xi|}^{2|\xi|} \int_{|\xi|(1-4\delta)}^{|\xi|(1+4\delta)} \int_{\Gamma_\delta^+(\eta(r,s)) \setminus B} |\hat{q}(re_1 - se_2 - \xi')|^2 d\xi' dr ds.$$

Para  $r, s$  fijos con  $\eta = re_1 - se_2$ , parametrizamos la variable  $\xi' \in \Gamma_\delta^+(\eta(r, s)) \setminus B$  por  $t$  y  $\theta$ :

$$\xi' = \frac{re_1 - se_2}{2} + h(r, s)t(\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2),$$

donde  $-\theta_0 + 16\delta < \theta < -\theta_0 + \frac{\pi}{2}$ ,  $\tan \theta_0 = \frac{s}{r}$  y  $\frac{1}{2} - \delta < t < \frac{1}{2} + \delta$ . Nos queda

$$\begin{aligned} re_1 - se_2 - \xi' &= \frac{re_1 - se_2}{2} - th(r, s)(\cos \theta e_1 + \sen \theta e_2) \\ &= \left( \frac{r}{2} - th(r, s) \cos \theta \right) e_1 + \left( -\frac{s}{2} - th(r, s) \sen \theta \right) e_2 \\ &= \frac{1}{2}(r - 2th(r, s) \cos \theta) e_1 - \frac{1}{2}(s + 2th(r, s) \sen \theta) e_2. \end{aligned}$$

Aplicamos el cambio de variables  $(\xi'_1, \xi'_2) \rightarrow (t, \theta)$ . Como antes, no importa referir las coordenadas de  $\xi'$  al sistema canónico, sino a  $\{e_1, e_2\}$ . De manera que

$$\xi' = \left( \frac{r}{2} + th(r, s) \cos \theta \right) e_1 - \left( \frac{s}{2} - th(r, s) \sen \theta \right) e_2$$

y se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\xi'_1, \xi'_2)}{\partial(t, \theta)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi'_1}{\partial t} & \frac{\partial \xi'_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \xi'_2}{\partial t} & \frac{\partial \xi'_2}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h(r, s) \cos \theta & -th(r, s) \sen \theta \\ h(r, s) \sen \theta & th(r, s) \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= th(r, s)^2 \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sen \theta \\ \sen \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = t(r^2 + s^2). \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} F_+^\delta(\xi) &\leq \int_{16\delta|\xi|}^{2|\xi|} \int_{|\xi|(1-4\delta)}^{|\xi|(1+4\delta)} \int_{\frac{1}{2}-\delta}^{\frac{1}{2}+\delta} \int_{-\theta_0+16\delta}^{-\theta_0+\frac{\pi}{2}} \left| \hat{q} \left( \frac{1}{2}(r - 2th \cos \theta) e_1 - \frac{1}{2}(s + 2th \sen \theta) e_2 \right) \right|^2 \\ &\quad \times th(r, s)^2 d\theta dt dr ds. \end{aligned}$$

En esta región  $E_\delta$ ,  $h(r, s) \leq 2|\xi|$ . Luego

$$\begin{aligned} F_+^\delta(\xi) &\leq C \int_{16\delta|\xi|}^{2|\xi|} \int_{|\xi|(1-4\delta)}^{|\xi|(1+4\delta)} \int_{\frac{1}{2}-\delta}^{\frac{1}{2}+\delta} \int_{-\theta_0+16\delta}^{-\theta_0+\frac{\pi}{2}} \left| \hat{q} \left( \frac{1}{2}(r - 2th \cos \theta) e_1 - \frac{1}{2}(s + 2th \sen \theta) e_2 \right) \right|^2 \\ &\quad \times |\xi|^2 d\theta t dt dr ds. \end{aligned}$$

Para  $t, r$  fijos tomamos el cambio de variables  $(\theta, s) \rightarrow u = (u_1, u_2)$  dado por

$$u = \eta(r, s) - \xi'(r, s, t, \theta),$$

donde

$$u_1 = \frac{1}{2}(r - 2th(r, s) \cos \theta), \quad u_2 = -\frac{1}{2}(s + 2th(r, s) \sen \theta).$$

Calculemos el término jacobiano.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} & \frac{\partial u_1}{\partial s} \\ \frac{\partial u_2}{\partial \theta} & \frac{\partial u_2}{\partial s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} th(r, s) \sen \theta & -t \frac{s}{h(r, s)} \cos \theta \\ -th(r, s) \cos \theta & -\frac{1}{2}(1 + 2t \sen \theta \frac{s}{h(r, s)}) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= th(r, s) \left| \begin{array}{cc} \text{sen } \theta & -t \frac{s}{h(r, s)} \cos \theta \\ -\cos \theta & -\frac{1}{2} \left( 1 + 2ts \frac{\text{sen } \theta}{h(r, s)} \right) \end{array} \right| \\
&= th(r, s) \left( -\frac{\text{sen } \theta}{2} - \text{sen}^2 \theta \frac{ts}{h(r, s)} - t \frac{s}{h(r, s)} \cos^2 \theta \right) \\
&= th(r, s) \left( -\frac{\text{sen } \theta}{2} - \frac{ts}{h(r, s)} \right).
\end{aligned}$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned}
&-th(r, s) \left( \frac{\text{sen } \theta}{2} + \frac{ts}{h(r, s)} \right) \\
&= \frac{-th(r, s) \text{sen } \theta}{2} - t^2 s = \frac{-2th(r, s) \text{sen } \theta}{4} - \frac{s}{4} + \frac{s}{4} - t^2 s \\
&= -\frac{1}{4} (s + 2th(r, s) \text{sen } \theta) + \frac{s}{4} - t^2 s = \frac{1}{2} u_2 + \frac{s}{4} - t^2 s \\
&= \frac{1}{2} u_2 - \frac{s(4t^2 - 1)}{4}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$du_1 du_2 = \left| \frac{1}{2} u_2 - \frac{s(4t^2 - 1)}{4} \right| ds d\theta.$$

En este punto de la demostración omitimos la dependencia paramétrica de las variables  $\eta$  y  $\xi'$  para clarificar la notación. Dado que  $\xi' \in \Gamma_\delta^+(\eta) \setminus B$ ,  $|\eta - \xi'| \sim |u_2|$ : Sea  $\tilde{\gamma}$  el ángulo que forman  $\eta - \xi'$  y  $e_2$ . Se cumple  $|u_2| = |u| \cos \tilde{\gamma}$ ,  $|\tilde{\gamma}| < \gamma_0 < \frac{\pi}{2}$ , y  $\cos \tilde{\gamma} \geq \cos \gamma_0$ . Podemos escribir que  $|u_2| = |u| \cos \tilde{\gamma} \leq |u|$  y  $|u_2| = |u| \cos \tilde{\gamma} \geq \cos \gamma_0 |u|$ . Tenemos

$$ds d\alpha = \frac{4}{|2u_2 - s(4t^2 - 1)|} du_1 du_2.$$

Además,

$$|2u_2 - s(4t^2 - 1)| \geq 2|u_2| - s|4t^2 - 1| \geq 2 \cos \gamma_0 |u| - 2|\xi| |4t^2 - 1| \quad (2.1.39)$$

$$\geq 2 \cos \gamma_0 |u| - 8|\xi| \delta (\delta + 1) \geq 2 \cos \gamma_0 |u| - 8\delta (1 + \delta)^2 |\eta| \quad (2.1.40)$$

$$\geq 2 \cos \gamma_0 |u| - \frac{|\eta - \xi'|}{2} (1 + \delta)^2, \quad (2.1.41)$$

En la segunda desigualdad de la línea (2.1.39) aplicamos que  $s \leq 2|\xi|$ . Pasamos de (2.1.39) a (2.1.40) gracias a que  $\frac{1}{2} - \delta \leq t \leq \frac{1}{2} + \delta$  implica que  $|4t^2 - 1| \leq 4\delta(\delta + 1)$ . La segunda desigualdad de (2.1.40) se debe a que  $|\xi| \leq |\xi - \frac{\eta}{2}| + \frac{|\eta|}{2} < \frac{|\eta|}{2} + \delta|\eta| + \frac{|\eta|}{2} = (1 + \delta)|\eta|$ . Puesto que  $\xi' \notin B(\eta, 16\delta|\eta|)$ ,  $|\eta - \xi'| \geq 16\delta|\eta|$  y  $\frac{|\eta - \xi'|}{2} \geq 8\delta|\eta|$ , que explica el paso de (2.1.40) a (2.1.41). Elegimos  $\delta_0$  tal que  $\frac{(1 + \delta_0)^2}{2} < 2 \cos \gamma_0$ . Se cumple

$$|2u_2 - s(4t^2 - 1)| \geq 2 \cos \gamma_0 |u| - \frac{(1 + \delta)^2}{2} |u| \geq C|u|,$$

para todo  $\delta < \delta_0$ . Escribimos

$$F_+^\delta(\xi) \leq C \int_{\mathbb{R}^2} \int_{|\xi|(1-4\delta)}^{|\xi|(1+4\delta)} \int_{\frac{1}{2}-\delta}^{\frac{1}{2}+\delta} |\hat{q}(u)|^2 |u|^{-1} t |\xi|^2 dt dr du$$

$$= C|\xi|^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{q}(u)|^2 |u|^{-1} \delta 8\delta |\xi| du = C|\xi|^3 \delta^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{q}(u)|^2 |u|^{-1} du,$$

de donde  $F_+^\delta(\xi) \leq C|\xi|^3 \delta^2 \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}^2$ , quedando probada la afirmación 2.1.2.  $\square$

Retomando la expresión (2.1.38) obtenemos que, para todo  $\delta < \delta_0$ :

$$\|I_1\|_{\dot{W}^{\beta,2}}^2 \leq C\delta^2 \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}^2 \int_{|\xi| > (2\delta)^{-1}} |\xi|^{2\beta-1} |\hat{q}(\xi)|^2 d\xi.$$

Ya que  $|\xi| > (2\delta)^{-1}$ , entonces  $|\xi|^{-2\varepsilon} < 2^{2\varepsilon} \delta^{2\varepsilon}$ , donde  $\varepsilon := \alpha - (\beta - \frac{1}{2}) > 0$ . Podemos escribir

$$\begin{aligned} \|I_1\|_{\dot{W}^{\beta,2}}^2 &\leq C\delta^2 \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}^2 \int_{|\xi| > (2\delta)^{-1}} |\xi|^{-2\varepsilon} |\xi|^{2\beta-1+2\varepsilon} |\hat{q}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq C\delta^{2+2\varepsilon} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}^2 \int_{|\xi| > (2\delta)^{-1}} |\xi|^{2\beta-1+2\varepsilon} |\hat{q}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq C\delta^{2+2\varepsilon} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}^2 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2}+\varepsilon,2}}^2, \end{aligned}$$

donde  $C$  depende de  $\alpha, \beta, \delta_0$ . De esta manera, haciendo  $\gamma := 1 + \varepsilon > 1$ , se cumple

$$\|I_1\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C\delta^\gamma \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{\dot{W}^{\alpha,2}}. \quad (2.1.42)$$

Acotemos ahora la norma del término  $I_0$ . Tenemos

$$\begin{aligned} \|I_0\|_{\dot{W}^{\beta,2}}^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} |\eta|^{2\beta} |\hat{I}_0(\eta)|^2 d\eta \\ &= \int_{|\eta| > \delta^{-1}} |\eta|^{2\beta-4} \left| \int_{\Gamma_\delta^+(\eta) \cap B} \hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \xi) d\xi \right|^2 d\eta \end{aligned} \quad (2.1.43)$$

$$\leq \int_{|\eta| > \delta^{-1}} |\eta|^{2\beta-4} \int_{\Gamma_\delta^+(\eta) \cap B} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \xi)|^2 d\xi \mathcal{L}^2(\Gamma_\delta^+(\eta) \cap B) d\eta \quad (2.1.44)$$

$$\leq C\delta^2 \int_{|\eta| > \delta^{-1}} |\eta|^{2\beta-2} \int_{\Gamma_\delta^+(\eta) \cap B} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \xi)|^2 d\xi d\eta \quad (2.1.45)$$

$$\leq C\delta^2 \int_{|\eta| > \delta^{-1}} |\eta|^{2\beta-2} \int_{\{\xi: |\xi-\eta| < 16\delta|\eta|\}} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \xi)|^2 d\xi d\eta. \quad (2.1.46)$$

En el paso de (2.1.43) a (2.1.44) aplicamos la propiedad

$$\left| \int_A f(x) dx \right|^2 \leq \mathcal{L}^n(A) \int_A |f(x)|^2 dx,$$

que se verifica en cualquier dimensión  $n$ , para todo subconjunto  $A$  de  $\mathbb{R}^n$   $\mathcal{L}^n$ -medible, y que se desprende de la desigualdad de Hölder en el caso  $p = 2$ . El paso de (2.1.44) a (2.1.45) se basa en que  $\mathcal{L}^2(\Gamma_\delta^+(\eta) \cap B) \leq \mathcal{L}^2(B) = C\delta^2 |\eta|^2$ .

Si  $|\xi - \eta| < 16\delta|\eta|$  podemos escribir

$$|\xi| = |\xi - \eta + \eta| \geq |\eta| - |\xi - \eta| \geq |\eta| - 16\delta|\eta| > C'(\delta_0)|\eta|,$$

con  $C'(\delta_0) := 1 - 16\delta_0 > 0$ , si  $\delta_0 < \frac{1}{16}$ . En particular, puesto que  $|\eta| > \delta^{-1}$ , tenemos que  $|\xi| \geq C'(\delta_0)\delta^{-1}$ . Además,

$$|\xi| \leq |\xi - \eta| + |\eta| < 16\delta|\eta| + |\eta| \leq (1 + 16\delta_0)|\eta|,$$

para todo  $0 < \delta < \delta_0$ . Por tanto, en la región  $|\xi - \eta| < 16\delta|\eta|$ , con  $0 < \delta < \delta_0 < \frac{1}{16}$ , se cumple  $|\eta| \sim |\xi|$ , con constantes sólo dependientes de  $\delta_0$ . En estas condiciones nótese lo siguiente

$$|\eta|^{2\beta-2} = |\eta|^{2\beta-1}|\eta|^{-1} \leq C|\xi|^{2\beta-1}|\eta|^{-1} < C|\xi|^{2\beta-1} \frac{16\delta}{|\eta - \xi|}.$$

Por todo ello y por el teorema de Fubini, a partir de la expresión (2.1.46) podemos escribir, para todo  $0 < \delta < \delta_0$ :

$$\begin{aligned} &\leq C\delta^3 \int_{|\xi| > C'(\delta_0)\delta^{-1}} |\hat{q}(\xi)|^2 \int_{\{|\eta - \xi| < 16\delta|\eta|\}} |\hat{q}(\eta - \xi)|^2 \frac{|\xi|^{2\beta-1}}{|\eta - \xi|} d\eta d\xi \\ &= C\delta^3 \int_{|\xi| > C'(\delta_0)\delta^{-1}} |\hat{q}(\xi)|^2 |\xi|^{2\beta-1} \int_{\{|\eta - \xi| < 16\delta|\eta|\}} \frac{|\hat{q}(\eta - \xi)|^2}{|\eta - \xi|} d\eta d\xi \\ &= C\delta^3 \int_{|\xi| > C'(\delta_0)\delta^{-1}} |\hat{q}(\xi)|^2 |\xi|^{2\beta-1} \int_{\{|\eta'| < 16\delta|\eta' + \xi|\}} \frac{|\hat{q}(\eta')|^2}{|\eta'|} d\eta' d\xi \\ &\leq C\delta^3 \int_{|\xi| > C'(\delta_0)\delta^{-1}} |\hat{q}(\xi)|^2 |\xi|^{2\beta-1+2\varepsilon} |\xi|^{-2\varepsilon} d\xi \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}^2 \\ &\leq C\delta^{3+2\varepsilon} \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2}+\varepsilon,2}}^2 \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}^2 \\ &\leq C\delta^{2+2\varepsilon} \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2}+\varepsilon,2}}^2 \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}^2, \end{aligned}$$

donde  $\varepsilon := \alpha - (\beta - \frac{1}{2}) > 0$ , y el último paso se debe a que  $\delta < \delta_0 < 1$ . Obtenemos<sup>1</sup>

$$\|I_0\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C\delta^\gamma \|q\|_{\dot{W}^{\alpha,2}} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}, \quad (2.1.47)$$

donde  $\gamma := 1 + \varepsilon > 1$ . De las estimaciones (2.1.42) y (2.1.47) se deduce

$$\|Q_+^\delta(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C\delta^\gamma \|q\|_{\dot{W}^{\alpha,2}} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}},$$

para todo  $0 < \delta < \delta_0$  y con  $\gamma > 1$ , donde  $C$  sólo depende de  $\alpha, \beta, \delta_0$ . Hemos probado el lema 2.1.2.

□

### Demostración del lema 2.1.3

En este caso, el anillo  $\Gamma_\infty^*(\eta)$  tiene semianchura 1, con lo que de acuerdo con la nota 2.1.2 se debe pensar que  $\delta$  es del orden de  $\frac{1}{|\eta|}$ . Se siguen las mismas líneas de demostración del

---

<sup>1</sup>Salta a la vista que el término  $I_0$  es “mejor” que  $I_1$ . De las estimaciones que tenemos se desprende que  $\|I_0\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C\delta^{3/2} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2},2}}$ . Pero para nuestro propósito es suficiente garantizar la estimación (2.1.47).

lema 2.1.2 con esa apreciación. Hacemos  $Q_*(q) =: \tilde{I}_0 + \tilde{I}_1$  de manera similar al caso anterior, tomando la bola  $B := B(\eta, 100)$ . Tiene sentido considerar esta bola si  $C_0 > \sqrt{2} 100$ . Nos restringiremos al dominio  $\Gamma_\infty^+(\eta) := \{\xi \in \Gamma_\infty^*(\eta) : \xi \cdot \nu > 0\}$ , con  $\nu := (-\eta_2, \eta_1)$ , puesto que el otro caso se trata de forma idéntica. Tratamos pues, los términos  $\tilde{I}_0^+$ ,  $\tilde{I}_1^+$ , que denotan las expresiones obvias.

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwartz como en (2.1.37) y cambiando el orden de integración en  $\xi$  y  $\eta$ , obtenemos

$$\|\tilde{I}_1^+\|_{\dot{W}^{\beta,2}}^2 \leq \int_{|\eta| > C_0} \int_{\Gamma_\infty^+(\eta) \setminus B} |\eta|^{2\beta-2} \int_{\Gamma_\infty^+(\eta) \setminus B} |\hat{g}(\eta - \xi')|^2 d\xi' |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi d\eta.$$

Si  $\xi \in \Gamma_\infty^+(\eta) \setminus B$ , las cantidades  $|\xi|$  y  $|\eta|$  son comparables. Por el teorema de Fubini,

$$\|\tilde{I}_1^+\|_{\dot{W}^{\beta,2}}^2 \leq C \int_{|\xi| > 1} |\xi|^{2\beta-2} |\hat{f}(\xi)|^2 \int_{\Lambda_\infty^-(\xi)} \int_{\Gamma_\infty^+(\eta) \setminus B} |\hat{g}(\eta - \xi')|^2 d\xi' d\eta d\xi, \quad (2.1.48)$$

donde  $\Lambda_\infty^-(\xi) := \{\eta \in \mathbb{R}^2 : \xi \in \Gamma_\infty^+(\eta) \setminus B, |\eta| > C_0\}$ . Para  $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , se cumple

$$G_+(\xi) := \int_{\Lambda_\infty^-(\xi)} \int_{\Gamma_\infty^+(\eta) \setminus B} |\hat{g}(\eta - \xi')|^2 d\xi' d\eta \leq C |\xi| \|g\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}. \quad (2.1.49)$$

*Prueba de la estimación (2.1.49)*

Puesto que en este caso se procede de manera similar a la prueba de la afirmación 2.1.2, nos limitaremos a comentar los cambios necesarios.

Las condiciones  $\xi, \xi' \in \Gamma_\infty^*(\eta)$ ,  $|\eta| > C_0$  implican que  $|\xi| \leq \left(1 + \frac{1}{C_0}\right) |\eta|$ , y

$$|\xi'| \leq \left(1 + \frac{1}{C_0}\right) |\eta|, \quad (2.1.50)$$

y ya que  $|\eta| < 2|\xi|$ , se sigue teniendo que  $|\eta| \sim |\xi|$ . Consideramos una referencia ortonormal  $\{e_1, e_2\}$  del plano tal que  $\xi = |\xi|e_1$  y escribimos  $\eta = re_1 - se_2$ . Los rangos de valores para  $r, s$  considerados son  $|r - |\xi|| \leq 4C_0^*$ , y  $16 \leq s \leq 2|\xi|$ , donde  $C_0^* := 2 + \frac{2}{C_0}$ . Para  $\xi' \in \Gamma_\infty^+(\eta)$ , se cumple  $\frac{|\eta|}{2} - 1 < |\eta|t < \frac{|\eta|}{2} + 1$ . Por tanto,  $|t - \frac{1}{2}| < \frac{1}{|\eta|} \leq \frac{C_0^*}{2|\xi|}$ , siendo el dominio de la correspondiente integral en  $t$ :

$$\frac{1}{2} - \frac{C_0^*}{2|\xi|} < t < \frac{1}{2} + \frac{C_0^*}{2|\xi|}. \quad (2.1.51)$$

Para  $\xi' \in \Gamma_\infty^+(\eta) \setminus B$ , sigue siendo cierto que  $|\eta - \xi'| \sim |u_2|$ , con  $\cos \gamma \geq \cos \gamma_0$ , para cierto ángulo  $\gamma_0$  que podemos suponer de coseno mayor que  $1/5$ , por ejemplo, y siendo  $\gamma$  el ángulo que forman  $\eta - \xi'$  y  $e_2$ . Para acotar el jacobiano del cambio de variables  $(\alpha, s) \leftrightarrow (u_1, u_2) = u$ , con  $u = \eta - \xi'$ , hay que aplicar las siguientes consideraciones. Por (2.1.51) y la condición  $|\xi| \geq \frac{|\eta|}{2} \geq \frac{C_0}{2}$ , se verifica  $2t + 1 \leq 2 + \frac{2C_0^*}{C_0}$ . También de (2.1.51) se deduce  $|2t - 1| \leq \frac{C_0^*}{|\xi|}$ .

Por ambas cosas,  $|4t^2 - 1| \leq C_0^*(2 + 2C_0^*/C_0)|\xi|^{-1}$ . Sabiendo (2.1.50),  $|\eta| \leq 2|\xi'|$ , y que  $|\eta - \xi'| \geq 100$ , porque  $\xi' \notin B$ , podemos escribir

$$(1 + 1/C_0)^{-1} \leq \frac{|\eta|}{|\xi'|} \leq 2 \leq \frac{|u|}{50}.$$

Tenemos

$$\begin{aligned} & |2u_2 - s(4t^2 - 1)| \\ & \geq 2|u_2| - s|4t^2 - 1| \geq 2 \cos \gamma_0 |u| - 2|\xi| |4t^2 - 1| \\ & \geq 2 \cos \gamma_0 |u| - 2C_0^*(2 + 2C_0^*/C_0) \\ & = 2 \cos \gamma_0 |u| - 2C_0^*(2 + 2C_0^*/C_0)(1 + 1/C_0)(1 + 1/C_0)^{-1} \\ & \geq 2 \cos \gamma_0 |u| - 2C_0^*(2 + 2C_0^*/C_0)(1 + 1/C_0) \frac{|u|}{50}. \end{aligned}$$

Vamos a demostrar que existe un  $C_0 > 0$  tal que

$$2 \cos \gamma_0 |u| - \frac{1}{25} C_0^*(2 + 2C_0^*/C_0)(1 + 1/C_0)|u| \geq |u|/100.$$

Recordando que  $C_0^* = 2 + 2/C_0$ , es fácil ver que

$$\lim_{C_0 \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{25} C_0^*(2 + 2C_0^*/C_0)(1 + 1/C_0) \right] = \frac{8}{25}. \quad (2.1.52)$$

Por tanto, existe un  $C_0$  de manera que la expresión a la que se toma el límite en (2.1.52) tome un valor menor que  $\frac{8}{25} + \varepsilon_0 = 2 \cos \gamma_0 - \frac{1}{100}$ , donde  $\varepsilon_0 := 2 \cos \gamma_0 - \frac{8}{25} - \frac{1}{100}$ . Nótese que  $\varepsilon_0 > 0$ , por cumplirse que  $\cos \gamma_0 > \frac{1}{5} > \frac{4}{25} + \frac{1}{200}$ . Para ese  $C_0$ , se tiene que

$$|2u_2 - s(4t^2 - 1)| \geq |u|/100.$$

Siguiendo las líneas de la prueba de la afirmación 2.1.2, las aclaraciones anteriores deberían conducirnos a que

$$\begin{aligned} G_+(\xi) & \leq C \int_{\mathbb{R}^2} \int_{|\xi| - 4C_0^*}^{|\xi| + 4C_0^*} \int_{\frac{1}{2} - \frac{C_0^*}{2|\xi|}}^{\frac{1}{2} + \frac{C_0^*}{2|\xi|}} |\hat{g}(u)|^2 |u|^{-1} t |\xi|^2 dt dr du \\ & = C |\xi|^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{g}(u)|^2 |u|^{-1} 4C_0^* C_0^* |\xi|^{-1} du = C |\xi| \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{g}(u)|^2 |u|^{-1} du. \end{aligned}$$

Nótese que

$$\int_{\frac{1}{2} - \frac{C_0^*}{2|\xi|}}^{\frac{1}{2} + \frac{C_0^*}{2|\xi|}} t dt = \frac{C_0^*}{2|\xi|}.$$

Queda probada la estimación (2.1.49). □

A partir de (2.1.48) y en virtud de la estimación (2.1.49), obtenemos:

$$\|\tilde{I}_1^+\|_{\dot{W}^{3,2}}^2 \leq C \|g\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}^2 \int_{|\xi| > 1} |\xi|^{2j-1} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$



De donde,

$$\|\tilde{I}_1^+\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C \|f\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2},2}} \|g\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}. \quad (2.1.53)$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwartz como en (2.1.44), se prueba que

$$\begin{aligned} \|\tilde{I}_0^+\|_{\dot{W}^{\beta,2}}^2 &\leq \int_{|\eta|>C_0} |\eta|^{2\beta-2} \int_{\Gamma_\infty^+(\eta) \cap B} |\hat{f}(\xi) \hat{g}(\eta - \xi)|^2 d\xi \mathcal{L}^2(B) d\eta \\ &= C \int_{|\eta|>C_0} |\eta|^{2\beta-2} \int_B |\hat{f}(\xi) \hat{g}(\eta - \xi)|^2 d\xi d\eta. \end{aligned}$$

En esta región  $|\eta| \sim |\xi|$ , y  $|\eta|^{-1} \leq \frac{100}{C_0} |\eta - \xi|^{-1}$ , por lo que cambiando el orden de integración en  $\xi$  y  $\eta$  por el teorema de Fubini y procediendo de manera análoga al caso  $I_0$  en la prueba del lema 2.1.2, se obtiene

$$\|\tilde{I}_0^+\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C \|f\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2},2}} \|g\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}. \quad (2.1.54)$$

De las fórmulas (2.1.53) y (2.1.54) se deduce la estimación deseada.  $\square$

Las estimación (1.5.4) de la proposición 1.5.2 se sigue de las estimaciones (2.1.8) y (2.1.35). Queda entonces demostrada la proposición 1.5.2.

## 2.2. Ganancia de regularidad de $Q_3(q)$ respecto de $q$

En esta sección vamos a probar en detalle la ganancia de casi una derivada del término cúbico, módulo una función de la clase  $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ , respecto del potencial que se establece en el teorema 1.5.3. Empecemos por expresar la siguiente

**Proposición 2.2.1.** Para  $n \geq 2$  y  $\eta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,

$$\widehat{Q_3(q)}(\eta) = v.p. \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau) \hat{q}(\tau - \xi)}{[\xi \cdot (\eta - \xi)] [\tau \cdot (\eta - \tau)]} d\xi d\tau \quad (2.2.1)$$

$$+ 2 \frac{i\pi}{|\eta|} v.p. \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Gamma(\eta)} \frac{\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau) \hat{q}(\tau - \xi)}{\tau \cdot (\eta - \tau)} d\sigma(\xi) d\tau \quad (2.2.2)$$

$$- \frac{\pi^2}{|\eta|^2} \int_{\Gamma(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau) \hat{q}(\tau - \xi) d\sigma(\tau) d\sigma(\xi). \quad (2.2.3)$$

Esta caracterización del término cúbico se deduce de la fórmula (1.2.3) para la resolvente del laplaciano (véase la nota C.2.1). En primer lugar, acotaremos el término esférico que aparece en la expresión de  $\widehat{Q_3(q)}(\eta)$  en (2.2.3), y en segundo lugar, estimaremos la parte de valor principal en (2.2.2). Respecto del otro término de valor principal en (2.2.1), nos limitaremos a comentar algunos detalles técnicos que puedan resultar novedosos al final del capítulo.

**Notación.** Para todo  $\eta \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , consideramos las siguientes notaciones

$$\widehat{Q'(q)}(\eta) := \frac{1}{|\eta|^2} \int_{\Gamma(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau) \hat{q}(\tau - \xi) d\sigma(\tau) d\sigma(\xi), \quad y \quad (2.2.4)$$

$$\widehat{Q''(q)}(\eta) := \frac{1}{|\eta|} v.p. \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\Gamma(\eta)} \frac{\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau) \hat{q}(\tau - \xi)}{\tau \cdot (\eta - \tau)} d\sigma(\xi) d\tau. \quad (2.2.5)$$

Para un potencial  $q$  en las hipótesis del teorema 1.5.3 vamos a probar que

$$Q'(q), Q''(q) \in W^{\beta,2}(\mathbb{R}^2) + C^\infty(\mathbb{R}^2),$$

para cualquier  $\beta$  tal que  $0 \leq \beta < \alpha + 1$ . Veremos esto en las dos subsecciones que siguen.

### 2.2.1. Estimación del término esférico $Q'(q)$

Dividamos el conjunto  $\Gamma(\eta) \times \Gamma(\eta)$  en dos regiones

$$\begin{aligned} I(\eta) &:= \left\{ (\xi, \tau) \in \Gamma(\eta) \times \Gamma(\eta) : |\xi - \tau| \geq \frac{|\eta|}{100} \right\} \quad y \\ II(\eta) &:= \left\{ (\xi, \tau) \in \Gamma(\eta) \times \Gamma(\eta) : |\xi - \tau| < \frac{|\eta|}{100} \right\}. \end{aligned}$$

Podemos escribir  $Q'(q) = Q'_I(q) + Q'_{II}(q)$ , donde

$$\widehat{Q'_I(q)}(\eta) := \frac{1}{|\eta|^2} \int \int_{I(\eta)} \hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau) \hat{q}(\tau - \xi) d\sigma(\tau) d\sigma(\xi),$$

y

$$\widehat{Q'_{II}(q)}(\eta) := \frac{1}{|\eta|^2} \int \int_{II(\eta)} \hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau) \hat{q}(\tau - \xi) d\sigma(\tau) d\sigma(\xi),$$

para todo  $\eta \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Formulamos las siguientes afirmaciones:

$$\left\| \mathcal{F}^{-1} \left( \chi \widehat{Q'_{II}(q)} \right) \right\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\beta, q) \|q\|_{L^2}^2 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}}, \quad (2.2.6)$$

para cualquier  $\varepsilon > 0$ , y además

$$\left\| \mathcal{F}^{-1} \left( \chi \widehat{Q'_I(q)} \right) \right\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\varepsilon, \beta, q) \left( \|q\|_{L^2} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} + \|q\|_{L^2}^2 \right) \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}}, \quad (2.2.7)$$

donde  $0 < \beta + \varepsilon < 2$  y  $C(\varepsilon, \beta, q)$  es una constante positiva que sólo depende de  $\varepsilon$ ,  $\beta$  y del soporte de  $q$ .

#### Demostración de la afirmación (2.2.6)

Sabemos que  $II(\eta) \subset II_{<}(\eta) \cup II_{>}(\eta)$  como consecuencia de la condición  $|\xi - \tau| < \frac{|\eta|}{100}$ , donde

$$II_{<}(\eta) := \left\{ |\xi - \tau| < \frac{|\eta|}{100}, |\xi|, |\tau| \leq \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{100} \right) |\eta| \right\}, \quad y$$

$$II_{>}(\eta) := \left\{ |\xi - \tau| < \frac{|\eta|}{100}, |\eta - \xi|, |\eta - \tau| \leq \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{100} \right) |\eta| \right\},$$

y  $(\xi, \tau) \in \Gamma(\eta) \times \Gamma(\eta)$ . En efecto: Supongamos que  $(\xi, \tau) \in II(\eta)$ . Si  $|\xi| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} |\eta|$  entonces  $|\tau| \leq |\tau - \xi| + |\xi| \leq \frac{|\eta|}{100} + \frac{\sqrt{2}}{2} |\eta|$ . Luego  $(\xi, \tau) \in II_{<}(\eta)$ . Si  $|\xi| > \frac{\sqrt{2}}{2} |\eta|$  se tiene

$$\begin{aligned} |\eta - \xi| &= (|\eta|^2 - |\xi|^2)^{\frac{1}{2}} \leq (|\eta|^2 - \frac{1}{2} |\eta|^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} |\eta|, \quad y \\ |\eta - \tau| &\leq |\eta - \xi| + |\xi - \tau| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} |\eta| + \frac{|\eta|}{100}, \end{aligned}$$

de forma que  $(\xi, \tau) \in II_{>}(\eta)$ .

Se cumple

$$\begin{aligned} \left| \widehat{Q'_{II}(q)}(\eta) \right| &\leq \frac{1}{|\eta|^2} \int \int_{II(\eta)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau) \hat{q}(\tau - \xi)| d\sigma(\tau) d\sigma(\xi) \\ &\leq \frac{1}{|\eta|^2} \int \int_{II_{<}(\eta)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau) \hat{q}(\tau - \xi)| d\sigma(\tau) d\sigma(\xi) \\ &\quad + \frac{1}{|\eta|^2} \int \int_{II_{>}(\eta)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau) \hat{q}(\tau - \xi)| d\sigma(\tau) d\sigma(\xi) \\ &= 2 \widehat{Q'_{II_{>}}(q)}(\eta), \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

donde  $\widehat{Q'_{II_{>}}(q)}(\eta) := \frac{1}{|\eta|^2} \int \int_{II_{>}(\eta)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau) \hat{q}(\tau - \xi)| d\sigma(\tau) d\sigma(\xi)$ , y la última igualdad se obtiene haciendo los cambios de variable  $\xi' = \eta - \xi$ ,  $\tau' = \eta - \tau$  en la integral (2.2.8) y cambiando el orden de integración en  $\xi'$  y  $\tau'$  por el teorema de Fubini y usando la propiedad de simetría  $(\xi, \tau) \in II_{>}(\eta) \Leftrightarrow (\tau, \xi) \in II_{>}(\eta)$ . Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwartz a la expresión integral de  $\widehat{Q'_{II_{>}}(q)}(\eta)$  y las propiedades de la región  $II_{>}(\eta)$  podemos escribir

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{F}^{-1} \left( \chi \widehat{Q'_{II_{>}}(q)} \right) \right\|_{\dot{W}^{\beta,2}}^2 &= \int_{\{\eta: |\eta| \geq 10\}} |\eta|^{2\beta} \left| \widehat{Q'_{II_{>}}(q)}(\eta) \right|^2 d\eta \\ &\leq \int_{\{\eta: |\eta| > 10\}} |\eta|^{2\beta-4} \int_{\{\xi \in \Gamma(\eta): |\xi| \geq (1-C_2)|\eta|\}} |\hat{q}(\xi)|^2 \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

$$\times \int_{\Gamma(\eta)} |\hat{q}(\eta - \tau)|^2 d\sigma(\tau) d\sigma(\xi) F(\eta) d\eta, \tag{2.2.10}$$

donde  $F(\eta) := \int_{\Gamma(\eta) \times \Gamma(\eta)} |\hat{q}(\tau' - \xi')|^2 d\sigma(\tau') d\sigma(\xi')$  y

$$C_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{100}. \tag{2.2.11}$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} &\{(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : |\eta| > 10, \xi \in \Gamma(\eta), |\xi| \geq (1 - C_2)|\eta|\} \\ &\subset \{(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : |\xi| > 1, |\eta| \leq (1 - C_2)^{-1} |\xi|, \eta \in \Lambda(\xi)\}. \end{aligned}$$

y por el lema B.2, podemos cambiar el orden de integración en  $\xi$  y  $\eta$  y estimar la expresión (2.2.9)-(2.2.10) por

$$\begin{aligned} & \int_{\{\xi \in \mathbb{R}^2 : |\xi| > 1\}} \frac{|\hat{q}(\xi)|^2}{|\xi|} \int_{\Omega(\xi)} |\eta|^{2\beta-3} \int_{\Gamma(\eta)} |\hat{q}(\eta - \tau)|^2 d\sigma(\tau) F(\eta) d\sigma(\eta) d\xi \\ & \leq C \|q\|_{L^2}^2 \int_{\{\xi \in \mathbb{R}^2 : |\xi| > 1\}} \frac{|\hat{q}(\xi)|^2}{|\xi|} \int_{\Omega(\xi)} |\eta|^{2\beta-2} \int_{\Gamma(\eta)} |\hat{q}(\eta - \tau)|^2 d\sigma(\tau) d\sigma(\eta) d\xi, \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

donde  $\Omega(\xi) := \{\eta \in \Lambda(\xi) : |\eta| \leq (1 - C_2)^{-1} |\xi|\}$ , y usamos que  $F(\eta) \leq C|\eta| \|q\|_{L^2}^2$ . Veamos esta última desigualdad. Si engrosamos la curva  $\Gamma(\eta)$  hasta

$$\Gamma_1(\eta) := \left\{ \tau \in \mathbb{R}^2 : \left| \tau - \frac{\eta}{2} - \frac{|\eta|}{2} \right| < 1 \right\}, \quad (2.2.13)$$

por la parte (1) del lema B.1 tenemos:

$$F(\eta) \leq C \int_{\Gamma(\eta)} \int_{\Gamma_1(\eta)} M \hat{q}(\tau - \xi')^2 d\tau d\sigma(\xi') \leq C \|M \hat{q}\|_{L^2}^2 \sigma(\Gamma(\eta)) \leq C |\eta| \|q\|_{L^2}^2, \quad (2.2.14)$$

donde la última desigualdad se sigue de la acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , la identidad de Plancherel y de que la medida de  $\Gamma(\eta)$  es  $\pi|\eta|$ . Análogamente:

$$\int_{\Gamma(\eta)} |\hat{q}(\eta - \tau)|^2 d\sigma(\tau) \leq C \int_{\Gamma_1(\eta)} |M \hat{q}(\eta - \tau')|^2 d\tau' \leq C \int_{\mathbb{R}^2} |M \hat{q}(x)|^2 dx \leq C \|q\|_{L^2}^2.$$

Obviamente, si  $\eta \in \Omega(\xi)$  entonces  $|\xi| \sim |\eta|$ . La expresión (2.2.12) está acotada por

$$C \|q\|_{L^2}^4 \int_{\{\xi \in \mathbb{R}^2 : |\xi| > 1\}} \frac{|\hat{q}(\xi)|^2}{|\xi|} |\xi|^{2\beta-2} \sigma(\Omega(\xi)) d\xi \leq C \|q\|_{L^2}^4 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon, 2}}^2.$$

Así hemos probado la estimación (2.2.6). □

### Demostración de la afirmación (2.2.7)

Haciendo el cambio de variable  $\tau = \eta - \tau'$ , tenemos

$$\begin{aligned} \widehat{Q'_I(q)}(\eta) &= \frac{1}{|\eta|^2} \int \int_{I(\eta)} \hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau') \hat{q}(\tau' - \xi) d\sigma(\tau') d\sigma(\xi) \\ &= \frac{1}{|\eta|^2} \int \int_{\{(\xi, \tau) \in \Gamma(\eta) \times \Gamma(\eta) : |\xi - (\eta - \tau)| \geq \frac{|\eta|}{100}\}} \hat{q}(\xi) \hat{q}(\tau) \hat{q}(\eta - \tau - \xi) d\sigma(\tau) d\sigma(\xi). \end{aligned}$$

Obsérvese que si  $|\eta| \geq 2$  podemos escribir

$$\{(\xi, \tau) \in \Gamma(\eta) \times \Gamma(\eta) : |\xi - (\eta - \tau)| \geq \frac{|\eta|}{100}\} = \bigcup_{k=1}^{\lfloor \log_2 |\eta| \rfloor} I_k(\eta) \cup I_\infty(\eta),$$

donde para cualquier  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $1 \leq k \leq \lfloor \log_2 |\eta| \rfloor$  denotamos:

$$I_k(\eta) := \left\{ (\xi, \tau) \in \Gamma(\eta) \times \Gamma(\eta) : |\xi - \tau| \sim 2^{-k} |\eta|, |\xi - (\eta - \tau)| \geq \frac{|\eta|}{100} \right\}, \quad (2.2.15)$$

$$I_\infty(\eta) := \left\{ (\xi, \tau) \in \Gamma(\eta) \times \Gamma(\eta) : |\xi - \tau| \leq 1, |\xi - (\eta - \tau)| \geq \frac{|\eta|}{100} \right\}.$$

Nótese que el caso  $k = \infty$  es necesario puesto que la unión desde  $k = 1$  a  $k = \lfloor \log_2 |\eta| \rfloor$  tan sólo podemos asegurar que abarca el conjunto de los  $\xi, \tau$  tales que  $|\xi - \tau| \geq 1$ .

Para cada  $k \geq 1$  definimos

$$\widehat{Q'_{I_k}(q)}(\eta) := \frac{1}{|\eta|^2} \int \int_{I_k(\eta)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\tau) \hat{q}(\eta - \tau - \xi)| d\sigma(\tau) d\sigma(\xi) \chi_{\{|\eta| \geq 2^k\}}(\eta),$$

y la misma expresión para  $I_\infty(\eta)$ , multiplicando por  $\chi$ . Para cualquier  $\eta$  con  $|\eta| \geq 10$ :

$$\left| \widehat{Q'_I(q)}(\eta) \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \widehat{Q'_{I_k}(q)}(\eta) + \widehat{Q'_{I_\infty}(q)}(\eta),$$

y entonces para probar (2.2.7) usamos que

$$\left\| \mathcal{F}^{-1} \left( \chi \widehat{Q'_I(q)} \right) \right\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \|Q'_{I_k}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} + \|Q'_{I_\infty}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}.$$

Sea  $\varepsilon > 0$ . Para todo  $k \geq 1$  afirmamos:

$$\|Q'_{I_k}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\varepsilon, \beta, q) 2^{-\varepsilon k} \|q\|_{L^2} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}}. \quad (2.2.7a)$$

Supongamos que  $0 < \beta + \varepsilon < 2$ . Entonces afirmamos:

$$\|Q'_{I_\infty}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\varepsilon, \beta, q) \|q\|_{L^2} \left( \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}} + \|q\|_{L^2} \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{3}{2}+\varepsilon,2}} \right), \quad (2.2.7b)$$

donde  $C(\varepsilon, \beta, q) > 0$  sólo depende de  $\varepsilon, \beta$  y del  $\text{spt } q$ .

En las siguientes demostraciones para estas estimaciones (2.2.7a), (2.2.7b) hacemos uso de las notaciones del lema 2.2.1 que constituye la herramienta fundamental para obtenerlas y ubicamos en la subsección 2.2.3 de resultados clave por cuestiones de claridad.

### Demostración de la estimación (2.2.7a)

Hacemos  $I_k(\eta) = I_k^1(\eta) \cup I_k^2(\eta)$ , donde

$$I_k^1(\eta) := \left\{ (\xi, \tau) \in I_k(\eta) : |\tau - \eta| \geq \frac{2^{-k}|\eta|}{100} \right\},$$

$$I_k^2(\eta) := \left\{ (\xi, \tau) \in I_k(\eta) : |\tau - \eta| \leq \frac{2^{-k}|\eta|}{100} \right\}.$$

Para cada  $j \in \{1, 2\}$ , definimos  $\widehat{Q'_{I_k^j}(q)}(\eta)$  de manera obvia multiplicando por  $\chi_{\{|\eta| \geq 2^k\}}(\eta)$ . Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz, y para  $|\eta| \geq 2^k, j \in \{1, 2\}$ :

$$\widehat{Q'_{I_k^j}(q)}(\eta) \leq \frac{1}{|\eta|^2} \left( \int \int_{I_k^j(\eta)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\tau)|^2 d\sigma(\tau) d\sigma(\xi) \right) \quad (2.2.16)$$

$$\times \int \int_{I_k^j(\eta)} |\hat{q}(\eta - \tau' - \xi')|^2 d\sigma(\tau') d\sigma(\xi') \Big)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.2.17)$$

Empecemos con  $Q'_{I_k^1}(q)$ . Por el lema B.1 y procediendo de manera similar a como lo hicimos en (2.2.14), tenemos:

$$\int \int_{I_k^1(\eta)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\tau)|^2 d\sigma(\tau) d\sigma(\xi) \leq C \|q\|_{L^2}^2 \int_{\Psi_k(\eta)} |\hat{q}(\tau)|^2 d\sigma(\tau), \quad (2.2.18)$$

donde  $\Psi_k(\eta) := \left\{ \tau \in \Gamma(\eta) : |\eta - \tau| \geq \frac{2^{-k}|\eta|}{100} \right\}$ . Ya que  $|\eta|^{-2\varepsilon} \leq 2^{-2\varepsilon k}$  y por el lema B.2,

$$\begin{aligned} \|Q'_{I_k^1}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}^2 &\leq C 2^{-2\varepsilon k} \|q\|_{L^2}^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\eta|^{2\beta-4+2\varepsilon} \int_{\Psi_k(\eta)} |\hat{q}(\tau)|^2 d\sigma(\tau) \\ &\quad \times \int \int_{I_k(\eta)} |\hat{q}(\eta - \tau' - \xi')|^2 d\sigma(\tau') d\sigma(\xi') d\eta \\ &= C 2^{-2\varepsilon k} \|q\|_{L^2}^2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\hat{q}(\tau)|^2}{|\tau|} \int_{\Omega_k(\tau)} |\eta|^{2\beta-3+2\varepsilon} \\ &\quad \times \int \int_{I_k(\eta)} |\hat{q}(\eta - \tau' - \xi')|^2 d\sigma(\tau') d\sigma(\xi') d\sigma(\eta) d\tau \\ &= C 2^{-2\varepsilon k} \|q\|_{L^2}^2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\hat{q}(\tau)|^2}{|\tau|} F_k(\tau) d\tau \\ &\leq C(\varepsilon, \beta, q) 2^{-2\varepsilon k} \|q\|_{L^2}^2 \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}^2 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}}^2, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue de la parte (i) del lema 2.2.1 con  $C_1 = 1/100$ , y  $F_k(\tau), \Omega_k(\tau)$  se definen en (2.2.36), (2.2.39).

Puede acotarse el término  $\widehat{Q'_{I_k^2}(q)}(\eta)$  de manera similar. En primer lugar, estimamos el factor

$$\int \int_{I_k^2(\eta)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\tau)|^2 d\sigma(\tau) d\sigma(\xi)$$

por  $C \|q\|_{L^2}^2 \int_{\tilde{\Psi}_k(\eta)} |\hat{q}(\xi)|^2 d\sigma(\xi)$ , donde  $\tilde{\Psi}_k(\eta) := \{\xi \in \Gamma(\eta) : |\eta - \xi| \geq \frac{49}{100} 2^{-k} |\eta|\}$ , usando el lema B.1 como más arriba. A fin de estimar la expresión  $\|Q'_{I_k^2}(q)\|_{\dot{W}^{\alpha,2}}^2$  como antes, procedemos análogamente de manera que la variable  $\xi$  ahora actúa justamente como la variable  $\tau$  antes, obteniendo que

$$\begin{aligned} \|Q'_{I_k^2}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}^2 &\leq C 2^{-2\varepsilon k} \|q\|_{L^2}^2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\hat{q}(\xi)|^2}{|\xi|} F_k(\xi) d\xi \\ &\leq C(\varepsilon, \beta, q) 2^{-2\varepsilon k} \|q\|_{L^2}^2 \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}^2 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}}^2, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se desprende de la parte (i) del lema 2.2.1 con  $C_1 = \frac{49}{100}$ .

Queda vista la estimación (2.2.7a).

□

**Demostración de la estimación (2.2.7b)**

Escribimos  $I_\infty(\eta) \subset I_\infty^1(\eta) \cup I_\infty^2(\eta)$ , donde

$$\begin{aligned} I_\infty^1(\eta) &:= \{(\xi, \tau) \in \Gamma(\eta) \times \Gamma(\eta) : |\tau - \xi| \leq 1, |\tau| \geq 1\} \quad \text{y} \\ I_\infty^2(\eta) &:= \{(\xi, \tau) \in \Gamma(\eta) \times \Gamma(\eta) : |\tau - \xi| \leq 1, |\tau| \leq 1\}. \end{aligned}$$

Denotamos  $\widehat{Q'_{I_\infty^j}(q)}(\eta)$  de la manera obvia (multiplicando por  $\chi$ ), para  $j = 1, 2$ . A fin de estimar el cuadrado de la norma de Sobolev de  $Q'_{I_\infty^j}(q)$ ,  $j = 1, 2$ , aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwartz como en (2.2.16), (2.2.17). Por el lema B.1, para  $I_\infty^1(\eta)$ , podemos hacer  $|\hat{q}(\eta - \tau' - \xi')| \leq CM\hat{q}(\eta - 2\tau')$ , para cierta constante  $C$  que depende del  $\text{spt } q$ , ya que

$$|(\eta - 2\tau') - (\eta - \tau' - \xi')| = |\xi' - \tau'| \leq 1,$$

y para  $I_\infty^2(\eta)$ , hacemos  $|\hat{q}(\eta - \xi' - \tau')| \leq CM\hat{q}(\eta - \tau')$ , puesto que

$$|\eta - \xi' - \tau' - (\eta - \tau')| = |\xi'| \leq |\xi' - \tau'| + |\tau'| \leq 2.$$

Además, sabiendo que  $|\xi' - \tau'| \leq 1$  podemos escribir

$$\int \int_{I_\infty^1(\eta)} M\hat{q}(\eta - 2\tau')^2 d\sigma(\xi') d\sigma(\tau') \leq C \int_{\Gamma(\eta)} M\hat{q}(\eta - 2\tau')^2 d\sigma(\tau')$$

(igualmente con  $M\hat{q}(\eta - \tau')$ , para  $I_\infty^2(\eta)$ ). Acotamos la integral que involucra a  $\hat{q}(\xi)$  por el lema B.1. Cambiamos el orden de integración en  $\tau, \eta$  por el lema B.2, y finalmente aplicando los apartados (ii) y (iii) del lema 2.2.1 (dado que  $0 < \beta + \varepsilon < 2$ ), se obtiene

$$\|Q'_{I_\infty^1}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}^2 \leq C(\varepsilon, \beta, q) \left( \|q\|_{L^2}^2 \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}^2 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}}^2 + \|q\|_{L^2}^4 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{3}{2}+\varepsilon,2}}^2 \right),$$

y

$$\|Q'_{I_\infty^2}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}^2 \leq C(\varepsilon, \beta, q) \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}^2 \|q\|_{L^2}^2 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}}^2.$$

Esto termina la demostración de la estimación (2.2.7b).

A partir de las estimaciones (2.2.7a), (2.2.7b) podemos escribir

$$\left\| \mathcal{F}^{-1} \left( \chi \widehat{Q'_I(q)} \right) \right\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\varepsilon, \beta, q) \|q\|_{L^2} \left( \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}} + \|q\|_{L^2} \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{3}{2}+\varepsilon,2}} \right),$$

quedando probada la afirmación (2.2.7). □

De (2.2.6) y (2.2.7), escogiendo  $\varepsilon = \alpha + 1 - \beta$  se deduce la estimación

$$\|\mathcal{F}^{-1} \chi \mathcal{F} Q'(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\alpha, \beta, q) (\|q\|_{L^2} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} + \|q\|_{L^2}^2) \|q\|_{\dot{W}^{\alpha,2}}, \quad (2.2.19)$$

para todo  $\beta$  tal que  $0 \leq \beta < \alpha + 1$ .

**Nota.** Para que se verifique la acotación (2.2.7) necesitamos que  $0 < \beta + \varepsilon < 2$ , y para ese  $\varepsilon$  esto se cumple puesto que  $\beta + \varepsilon = \alpha + 1$  y  $0 \leq \alpha < 1$ .

Para controlar la norma de Sobolev no homogénea de  $\mathcal{F}^{-1}\chi\mathcal{F}Q'(q)$  falta ver que la función está en  $L^2(\mathbb{R}^2)$ . Substituyendo  $\beta$  por 0 en (2.2.6) y eligiendo cualquier  $\varepsilon$  tal que  $0 < \varepsilon < 1$  deducimos que

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{\chi Q'_{II}(q)}\right) \in L^2(\mathbb{R}^2),$$

ya que  $q \in \dot{W}^{-(1-\varepsilon),2}(\mathbb{R}^2)$  por el lema B.1 gracias a que  $q \in L^2(\mathbb{R}^2)$ . La afirmación (2.2.7) se cumple en el caso  $\beta = 0$  para cualquier  $\varepsilon$  tal que  $0 < \varepsilon < 2$ . De este modo, si elegimos  $\varepsilon$  con  $0 < \varepsilon < 1$  (de manera que  $q \in \dot{W}^{-(1-\varepsilon),2}(\mathbb{R}^2)$ ) la acotación (2.2.7) con  $\beta = 0$  nos dice que  $\mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{\chi Q'_I(q)}\right) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ . Queda visto que

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{\chi Q'(q)}\right) \in L^2(\mathbb{R}^2). \quad (2.2.20)$$

Escribimos

$$Q'(q) = \mathcal{F}^{-1}\left((1-\chi)\widehat{Q'(q)}\right) + \mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{\chi Q'(q)}\right),$$

donde el primer término es una función perteneciente a la clase  $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ , y el segundo está en  $W^{\beta,2}(\mathbb{R}^2)$  para  $\alpha, \beta$  y  $q$  en las hipótesis del teorema 1.5.3 gracias a (2.2.19) y (2.2.20). De este modo, hemos terminado con el término  $Q'(q)$ .

## 2.2.5. Estimación del término valor principal “mixto” $Q''(q)$

Queremos probar que  $Q''(q) \in W^{\beta,2}(\mathbb{R}^2) + C^\infty(\mathbb{R}^2)$  para todo  $\beta$  tal que  $0 \leq \beta < \alpha + 1$  para  $\alpha$  y  $q$  como en el enunciado del teorema 1.5.3, donde el término  $Q''(q)$  se define en (2.2.5). Las singularidades en la integral en la variable  $\tau$  que tenemos en (2.2.5) son aquellos puntos  $\tau$  del plano tales que  $\tau \cdot (\eta - \tau) = 0$ , es decir, los puntos de la circunferencia  $\Gamma(\eta)$ . Esta situación ya aparecía en la integral (2.1.3) para el término de valor principal  $P(q)$  correspondiente al término cuadrático. No debe sorprendernos pues, que utilicemos aquí también la partición del plano  $\mathbb{R}^2$  introducida en (A.0.3)<sup>2</sup>. En este caso, tomamos  $j_0 = j_1$ , siendo  $j_1$  el menor entero tal que  $j_1 \geq 1 - \log_2(\delta_1)$ , para el  $\delta_1$  del lema 2.2.2.

Para  $j_1 \leq j < +\infty$ , escribimos

$$\widehat{Q''_j(q)}(\eta) := \chi_{[2^j, \infty)}(|\eta|) \frac{1}{|\eta|} \int_{\Gamma_j(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \frac{\hat{q}(\xi)\hat{q}(\eta - \tau)\hat{q}(\tau - \xi)}{\tau \cdot (\eta - \tau)} d\sigma(\xi) d\tau. \quad (2.2.21)$$

$\widehat{Q''_\infty(q)}(\eta)$ ,  $\widehat{Q''_{j_1^-}(q)}(\eta)$  denotan las expresiones obvias para los dominios  $\tilde{\Gamma}_\infty(\eta)$ ,  $\Gamma_{j_1^-}(\eta)$  (sin la función característica). Si  $\eta \in \mathbb{R}^2$ , con  $|\eta| \geq 2^{j_1}$ :

$$\widehat{Q''(q)}(\eta) = \widehat{Q''_{j_1^-}(q)}(\eta) + \sum_{j=j_1}^N \widehat{Q''_j(q)}(\eta) + \widehat{Q''_\infty(q)}(\eta)$$

<sup>2</sup>Ahora no añadimos la condición  $|\xi| > |\xi - \eta|$  en las expresiones de  $\Gamma_{j_0^-}(\eta)$ ,  $\Gamma_j(\eta)$ ,  $\tilde{\Gamma}_\infty(\eta)$ . Recordemos que el término cúbico no goza de la propiedad de simetría en las regiones  $|\xi| \geq |\eta - \xi|$ ,  $|\xi| \leq |\eta - \xi|$ , como ocurría en el término esférico  $Q_2(q)$ .



$$= \widehat{Q''_{j_1}}(q)(\eta) + \sum_{j=j_1}^{\infty} \widehat{Q''_j}(q)(\eta) + \widehat{Q''_{\infty}}(q)(\eta).$$

En esta subsección demostraremos que en las hipótesis del teorema 1.5.3 se cumple

$$\|\mathcal{F}^{-1}\chi^*\mathcal{F}Q''(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\alpha, \beta, q) (\|q\|_{L^2}^2 + \|q\|_{L^2}\|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}) \|q\|_{\dot{W}^{\alpha,2}},$$

para  $\chi^*$  con  $C_0$  suficientemente grande que en particular debe cumplir  $C_0 > \max\{2^{j_1}, \frac{1}{\delta_1}, 10\}$ , para el  $\delta_1$  del lema 2.2.2.

Comprobemos que se cumple la estimación análoga a (2.1.12):

$$\|\mathcal{F}^{-1}(\chi \widehat{Q''_{j_1}}(q))\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\varepsilon, \beta, j_1, q) \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}} \|q\|_{L^2}^2, \quad (2.2.22)$$

para  $\varepsilon > 0$ ,  $\beta + \varepsilon \geq 1$  y  $C(\varepsilon, \beta, j_1, q)$  sólo dependiente de  $\varepsilon$ ,  $\beta$ ,  $j_1$  y  $\text{spt } q$ .

Se tiene

$$\begin{aligned} & \left| \widehat{Q''_{j_1}}(q)(\eta) \right| \\ & \leq \frac{C}{|\eta|^3} \int_{\Gamma_{j_1}^-(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} |\hat{q}(\xi)\hat{q}(\eta - \tau)\hat{q}(\tau - \xi)| d\sigma(\xi) d\tau \\ & \leq \frac{C}{|\eta|^3} \left[ \int_{\Gamma_{j_1}^-(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} |\hat{q}(\xi)\hat{q}(\eta - \tau)|^2 d\sigma(\xi) d\tau \int_{\Gamma_{j_1}^-(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} |\hat{q}(\tau' - \xi')|^2 d\sigma(\xi') d\tau' \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

donde hemos aplicado que si  $\tau \in \Gamma_{j_1}^-(\eta)$  entonces

$$|\tau \cdot (\eta - \tau)| = \left| \left( \frac{|\eta|}{2} \right)^2 - \left| \tau - \frac{\eta}{2} \right|^2 \right| \geq C(j_1)|\eta|^2,$$

y la desigualdad de Cauchy-Schwartz. También sabemos que

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_{j_1}^-(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} |\hat{q}(\tau' - \xi')|^2 d\sigma(\xi') d\tau' = \int_{\Gamma(\eta)} \int_{\Gamma_{j_1}^-(\eta)} |\hat{q}(\tau' - \xi')|^2 d\tau' d\sigma(\xi') \\ & \leq \int_{\Gamma(\eta)} \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{q}(x)|^2 dx d\sigma(\xi') = \pi |\eta| \|q\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Así, obtenemos

$$\left| \widehat{Q''_{j_1}}(q)(\eta) \right| \leq \frac{C(j_1)}{|\eta|^{\frac{5}{2}}} \|q\|_{L^2} \left( \int_{\Gamma_{j_1}^-(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} |\hat{q}(\xi)\hat{q}(\eta - \tau)|^2 d\sigma(\xi) d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Gracias al lema B.1 y a la acotación del operador maximal  $M$  en  $L^2(\mathbb{R}^2)$ ,

$$\int_{\Gamma(\eta)} |\hat{q}(\xi)|^2 d\sigma(\xi) \leq C \int_{\Gamma_1(\eta)} (M\hat{q}(x))^2 dx \leq C \|M\hat{q}\|_{L^2}^2 \leq C \|q\|_{L^2}^2,$$

donde  $\Gamma_1(\eta) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \left| x - \frac{\eta}{2} \right| - \frac{|\eta|}{2} < 1 \right\}$ . Tenemos

$$\left| \widehat{Q''_{j_1}}(q)(\eta) \right| \leq \frac{C}{|\eta|^{\frac{5}{2}}} \|q\|_{L^2}^2 \left[ \int_{\Gamma_{j_1}^-(\eta)} |\hat{q}(\eta - \tau)|^2 d\tau \right]^{\frac{1}{2}},$$

y

$$\|\mathcal{F}^{-1}(\chi \widehat{Q''_{j_1}(q)})\|_{\dot{W}^{\beta,2}}^2 \leq C \|q\|_{L^2}^4 \int_{|\eta|>10} |\eta|^{2\beta-5} \int_{\Gamma_{j_1}^-(\eta)} |\hat{q}(\eta-\tau)|^2 d\tau d\eta. \quad (2.2.23)$$

Para  $\tau \in \Gamma_{j_1}^-(\eta)$ , obsérvese lo siguiente. Si  $|\tau - \frac{\eta}{2}| \geq (\frac{1}{2} + 2^{-j_1+1})|\eta|$  se cumple

$$|\eta - \tau| \geq \left| \tau - \frac{\eta}{2} \right| - \frac{|\eta|}{2} \geq \left( \frac{1}{2} + 2^{-j_1+1} - \frac{1}{2} \right) |\eta| = 2^{-j_1+1} |\eta|,$$

y si  $|\tau - \frac{\eta}{2}| \leq (\frac{1}{2} - 2^{-j_1+1})|\eta|$  entonces

$$|\eta - \tau| \geq \frac{|\eta|}{2} - \left| \tau - \frac{\eta}{2} \right| \geq \left( \frac{1}{2} - \left( \frac{1}{2} - 2^{-j_1+1} \right) \right) |\eta| = 2^{-j_1+1} |\eta|.$$

Es decir,  $|\eta| \leq 2^{j_1-1} |\eta - \tau|$ . Para  $\varepsilon > 0$  tal que  $\beta + \varepsilon \geq 1$ , este hecho nos permite acotar la expresión (2.2.23) por

$$C \|q\|_{L^2}^4 \int_{|\eta|>10} |\eta|^{-3-2\varepsilon} \int_{\Gamma_{j_1}^-(\eta)} |\eta|^{2\beta-2+2\varepsilon} |\hat{q}(\eta-\tau)|^2 d\tau d\eta \quad (2.2.24)$$

$$\leq C \|q\|_{L^2}^4 \int_{|\eta|>10} |\eta|^{-3-2\varepsilon} \int_{\Gamma_{j_1}^-(\eta)} |\eta - \tau|^{2(\beta-1+\varepsilon)} |\hat{q}(\eta-\tau)|^2 d\tau d\eta \quad (2.2.25)$$

$$\leq C \|q\|_{L^2}^4 \|q\|_{\dot{W}^{\alpha,2}}^2 \int_{|\eta|>10} |\eta|^{-3-2\varepsilon} d\eta \leq C(\varepsilon, \beta, j_1, q) \|q\|_{L^2}^4 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}}^2.$$

Al pasar de (2.2.24) a (2.2.25) usamos que  $\beta + \varepsilon - 1 \geq 0$ . Nótese que  $\int_{|\eta|>10} |\eta|^{-3-2\varepsilon} d\eta \leq 1$ . Concluimos la estimación (2.2.22).

### Estimación de los términos de las coronas.

En virtud de la desigualdad de Minkowski, tenemos

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{F}^{-1} \left( \chi \sum_{j=j_1}^{\infty} \widehat{Q''_j(q)} \right) \right\|_{\dot{W}^{\beta,2}} &= \left\| \sum_{j=j_1}^{\infty} \mathcal{F}^{-1} \left( \chi \widehat{Q''_j(q)} \right) \right\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \\ &\leq \sum_{j=j_1}^{\infty} \left\| \mathcal{F}^{-1} \left( \chi \widehat{Q''_j(q)} \right) \right\|_{\dot{W}^{\beta,2}}. \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

Si  $j \geq 1$  y  $\tau \in \Gamma_j(\eta)$ ,  $|\tau \cdot (\eta - \tau)| \geq 2^{-j-2} |\eta|^2$ , de donde se desprende que

$$|\widehat{Q''_j(q)}(\eta)| \leq 2^{j+2} \chi_{(2^j, +\infty)}(|\eta|) \frac{1}{|\eta|^3} \int_{\Gamma_j(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau) \hat{q}(\tau - \xi)| d\sigma(\xi) d\tau.$$

Se cumple

$$\Gamma_j(\eta) \subset \left\{ \tau \in \mathbb{R}^2 : \left| \tau - \frac{\eta}{2} \right| - \frac{|\eta|}{2} < 2^{-j+1} |\eta| \right\},$$

y aplicando el **lema 2.2.2**, que constituye la clave de la convergencia de la serie (2.2.26), al caso  $\delta = 2^{-j+1}$ , sabemos que existen  $\gamma > 1$  y  $C = C(\delta_1, \varepsilon, \beta, q) > 0$  tales que para todo  $j \in \{1, 2, 3, \dots\}$  verificando  $2^{-j+1} \leq \delta_1$  (es decir,  $j \geq j_1$ ), es cierto que

$$\left\| \mathcal{F}^{-1} \left( \chi \widehat{Q_j''(q)} \right) \right\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C 2^{j+2} (2^{-j+1})^\gamma \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}} \left( \|q\|_{L^2} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} + \|q\|_{L^2}^2 \right),$$

donde  $\varepsilon > 0$  satisface  $0 < \beta + \varepsilon < 2$ . Podemos escribir

$$\begin{aligned} \sum_{j=j_1}^{\infty} \left\| \mathcal{F}^{-1} \left( \chi \widehat{Q_j''(q)} \right) \right\|_{\dot{W}^{\beta,2}} &\leq C \sum_{j=j_1}^{\infty} 2^{-j(\gamma-1)} 2^{\gamma+2} \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}} \left( \|q\|_{L^2} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} + \|q\|_{L^2}^2 \right) \\ &= C(\delta_1, \varepsilon, \beta, q) \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}} \left( \|q\|_{L^2} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} + \|q\|_{L^2}^2 \right). \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

La serie  $\sum_{j=j_1}^{\infty} 2^{-j(\gamma-1)}$  converge porque  $\gamma > 1$ .

### Estimación de la parte singular próxima a $\Gamma(\eta)$ .

En este apartado trataremos el término  $Q_\infty''(q)$ . Como se verá en seguida la clave del control de este término reside en el **lema 2.2.2** y el **lema 2.2.3**. Vamos a probar esta estimación:

$$\left\| \mathcal{F}^{-1} \left( \chi^* \widehat{Q_\infty''(q)} \right) \right\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C \left[ \|q\|_{L^2} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} + \|q\|_{L^2}^2 \right] \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}}, \quad (2.2.28)$$

para cierta constante  $C > 0$  sólo dependiente de  $\varepsilon$ ,  $\beta$ ,  $\delta_1$  y del soporte de  $q$ , suponiendo  $\chi^*$  con  $C_0 > 10$  y  $C_0 > \frac{1}{\delta_1}$ , para el  $\delta_1$  del lema 2.2.2 y dado que  $0 < \beta + \varepsilon < 2$ . Para ello, procedemos de manera similar a como acotábamos el término de valor principal  $P_\infty(q)$  para  $Q_2(q)$ . Análogamente a (2.1.23), escribimos

$$\widehat{Q_\infty''(q)}(\eta) = \frac{1}{|\eta|} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon^+(\eta)} + \int_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon^-(\eta)} \right) \int_{\Gamma(\eta)} \frac{\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau) \hat{q}(\tau - \xi)}{\tau \cdot (\eta - \tau)} d\sigma(\xi) d\tau, \quad (2.2.29)$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_\varepsilon^+(\eta) &:= \left\{ \tau \in \mathbb{R}^2 : \varepsilon < \left| \tau - \frac{\eta}{2} \right| - \frac{|\eta|}{2} < 2^{-N-1} |\eta| \right\}, \text{ y} \\ \tilde{\Gamma}_\varepsilon^-(\eta) &:= \left\{ \tau \in \mathbb{R}^2 : \varepsilon < \frac{|\eta|}{2} - \left| \tau - \frac{\eta}{2} \right| < 2^{-N-1} |\eta| \right\}. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio  $\tau' = \phi(\tau)$  en la primera integral en (2.2.29), donde  $\phi$  se define en (2.1.26), obtenemos

$$\begin{aligned} &\int_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon^+(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \frac{\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau') \hat{q}(\tau' - \xi)}{\tau' \cdot (\eta - \tau')} d\sigma(\xi) d\tau' \\ &= \int_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon^-(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \frac{\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \phi(\tau)) \hat{q}(\phi(\tau) - \xi)}{\phi(\tau) \cdot (\eta - \phi(\tau))} |D\phi(\tau)| d\sigma(\xi) d\tau. \end{aligned}$$

Se verifica

$$\begin{aligned}
& \widehat{Q''_\infty(q)}(\eta) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} |\eta|^{-1} \int_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon^-(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \left[ \frac{\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \phi(\tau)) \hat{q}(\phi(\tau) - \xi)}{\phi(\tau) \cdot (\eta - \phi(\tau))} |D\phi(\tau)| \right. \\
&\quad \left. + \frac{\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau) \hat{q}(\tau - \xi)}{\tau \cdot (\eta - \tau)} \right] d\sigma(\xi) d\tau \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon^-(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \frac{\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \phi(\tau)) \hat{q}(\phi(\tau) - \xi) - \hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau) \hat{q}(\tau - \xi)}{|\eta| \left( \left| \frac{\eta}{2} \right|^2 - \left| \phi(\tau) - \frac{\eta}{2} \right|^2 \right)} |D\phi(\tau)| d\sigma(\xi) d\tau \right. \\
&\quad + \int_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon^-(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \frac{\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau) \hat{q}(\tau - \xi)}{|\eta| \left( \left| \frac{\eta}{2} \right|^2 - \left| \phi(\tau) - \frac{\eta}{2} \right|^2 \right)} |D\phi(\tau)| d\sigma(\xi) d\tau \\
&\quad \left. + \int_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon^-(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \frac{\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau) \hat{q}(\tau - \xi)}{|\eta| (\tau \cdot (\eta - \tau))} d\sigma(\xi) d\tau \right] \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon^-(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \frac{\hat{q}(\xi) [\hat{q}(\eta - \phi(\tau)) \hat{q}(\phi(\tau) - \xi) - \hat{q}(\eta - \tau) \hat{q}(\tau - \xi)]}{|\eta| \left( \left| \frac{\eta}{2} \right|^2 - \left| \phi(\tau) - \frac{\eta}{2} \right|^2 \right)} |D\phi(\tau)| d\sigma(\xi) d\tau \right. \\
&\quad - 2 \int_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon^-(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \frac{\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau) \hat{q}(\tau - \xi)}{|\eta| \left( \left| \frac{\eta}{2} \right| + \left| \phi(\tau) - \frac{\eta}{2} \right| \right) \cdot \left| \tau - \frac{\eta}{2} \right|} d\sigma(\xi) d\tau \\
&\quad \left. + 2 \int_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon^-(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \frac{\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau) \hat{q}(\tau - \xi)}{|\eta| \left( \left| \frac{\eta}{2} \right| + \left| \phi(\tau) - \frac{\eta}{2} \right| \right) \left( \left| \frac{\eta}{2} \right| + \left| \tau - \frac{\eta}{2} \right| \right)} d\sigma(\xi) d\tau \right] \\
&=: \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (K_1^\varepsilon + K_2^\varepsilon + K_3^\varepsilon),
\end{aligned}$$

donde hemos aplicado las identidades (2.1.27), (2.1.28) y (2.1.30) (para la variable  $\tau$ ) así como la igualdad

$$\frac{1}{\left| \frac{\eta}{2} \right|^2 - \left| \phi(\tau) - \frac{\eta}{2} \right|^2} + \frac{1}{\tau \cdot (\eta - \tau)} = \frac{2}{\left( \left| \frac{\eta}{2} \right| + \left| \phi(\tau) - \frac{\eta}{2} \right| \right) \left( \left| \frac{\eta}{2} \right| + \left| \tau - \frac{\eta}{2} \right| \right)}.$$

Con  $|\eta| > C_0$ , los términos  $|K_2^\varepsilon|$ ,  $|K_3^\varepsilon|$  pueden acotarse superiormente por

$$\widehat{\tilde{J}(q)}(\eta) := C \chi^*(\eta) \int_{\Gamma_\infty(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \frac{|\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau) \hat{q}(\tau - \xi)|}{|\eta|^3} d\sigma(\xi) d\tau, \quad (2.2.30)$$

donde

$$\Gamma_\infty(\eta) = \left\{ \tau \in \mathbb{R}^2 : \left| \left| \tau - \frac{\eta}{2} \right| - \left| \frac{\eta}{2} \right| \right| \leq 1 \right\}.$$

Para acotar la norma de  $\tilde{J}(q)$ , tomando  $C_0 > \frac{1}{\delta_1}$  (para el  $\delta_1$  del lema 2.2.2) basta controlar la norma del término  $Q''_\delta(q)$  con  $\delta = 1/C_0$ , siguiendo la notación del lema 2.2.2, ya que si  $|\eta| \geq C_0$  entonces  $\Gamma_\infty(\eta) \subset \Gamma_\delta(\eta)$ , para  $\delta = 1/C_0$ . Por el lema 2.2.2 en el caso  $\delta = \frac{1}{C_0} (< \delta_1)$ , existe una constante  $C = C(\varepsilon, \beta, \delta_1, q) > 0$  tal que

$$\|\tilde{J}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C \left( \|q\|_{L^2} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}} + \|q\|_{L^2}^2 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}} \right). \quad (2.2.31)$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} K_1^\varepsilon &= \frac{1}{|\eta|} \int_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon^-(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \frac{\hat{q}(\xi) [\hat{q}(\eta - \phi(\tau)) \hat{q}(\phi(\tau) - \xi) - \hat{q}(\eta - \tau) \hat{q}(\tau - \xi)]}{\left| \frac{\eta}{2} \right|^2 - \left| \phi(\tau) - \frac{\eta}{2} \right|^2} d\sigma(\xi) d\tau \\ &+ \frac{2}{|\eta|} \int_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon^-(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \frac{\hat{q}(\xi) [\hat{q}(\eta - \phi(\tau)) \hat{q}(\phi(\tau) - \xi) - \hat{q}(\eta - \tau) \hat{q}(\tau - \xi)]}{\left| \frac{\eta}{2} \right|^2 - \left| \phi(\tau) - \frac{\eta}{2} \right|^2} \frac{\left| \frac{\eta}{2} \right| - \left| \tau - \frac{\eta}{2} \right|}{\left| \tau - \frac{\eta}{2} \right|} d\sigma(\xi) d\tau. \end{aligned}$$

Si  $\tau \in \tilde{\Gamma}_\varepsilon^-(\eta)$  y  $|\eta| > 10$ ,

$$0 < \frac{\left| \frac{\eta}{2} \right| - \left| \tau - \frac{\eta}{2} \right|}{\left| \tau - \frac{\eta}{2} \right|} < 1.$$

Esto es,

$$\begin{aligned} |K_1^\varepsilon| &\leq \frac{3}{|\eta|} \int_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon^-(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \frac{|\hat{q}(\xi) \hat{q}(\phi(\tau) - \xi) [\hat{q}(\eta - \phi(\tau)) - \hat{q}(\eta - \tau)]|}{\left| \left| \frac{\eta}{2} \right|^2 - \left| \phi(\tau) - \frac{\eta}{2} \right|^2 \right|} d\sigma(\xi) d\tau \\ &+ \frac{3}{|\eta|} \int_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon^-(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \frac{|\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau) [\hat{q}(\phi(\tau) - \xi) - \hat{q}(\tau - \xi)]|}{\left| \left| \frac{\eta}{2} \right|^2 - \left| \phi(\tau) - \frac{\eta}{2} \right|^2 \right|} d\sigma(\xi) d\tau \\ &= 3 (\mathcal{F}(\tilde{J}_1(q))(\eta) + \mathcal{F}(\tilde{J}_2(q))(\eta)), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \widehat{\tilde{J}_1(q)}(\eta) &:= \frac{1}{|\eta|} \int_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon^-(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \frac{|\hat{q}(\xi) \hat{q}(\phi(\tau) - \xi) [\hat{q}(\eta - \phi(\tau)) - \hat{q}(\eta - \tau)]|}{\left| \left| \frac{\eta}{2} \right|^2 - \left| \phi(\tau) - \frac{\eta}{2} \right|^2 \right|} d\sigma(\xi) d\tau, \\ \widehat{\tilde{J}_2(q)}(\eta) &:= \frac{1}{|\eta|} \int_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon^-(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \frac{|\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau) [\hat{q}(\phi(\tau) - \xi) - \hat{q}(\tau - \xi)]|}{\left| \left| \frac{\eta}{2} \right|^2 - \left| \phi(\tau) - \frac{\eta}{2} \right|^2 \right|} d\sigma(\xi) d\tau. \end{aligned}$$

Por la estimación de Calderón (véase (2.1.33)),

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(\tilde{J}_1(q))(\eta)| &\leq C \frac{1}{|\eta|} \int_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon^-(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \frac{M(\nabla \hat{q})(\eta - \phi(\tau)) + M(\nabla \hat{q})(\eta - \tau)}{\left| \phi(\tau) - \frac{\eta}{2} \right| + \left| \frac{\eta}{2} \right|} \\ &\quad \times |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\phi(\tau) - \xi)| d\sigma(\xi) d\tau \\ &\leq C (\mathcal{F}(\tilde{J}_1^1(q))(\eta) + \mathcal{F}(\tilde{J}_1^2(q))(\eta)), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\tilde{J}_1^1(q))(\eta) &:= \frac{1}{|\eta|^2} \int_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon^-(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} |\hat{q}(\xi) M(\nabla \hat{q})(\eta - \phi(\tau)) \hat{q}(\phi(\tau) - \xi)| d\sigma(\xi) d\tau, \\ \mathcal{F}(\tilde{J}_1^2(q))(\eta) &:= \frac{1}{|\eta|^2} \int_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon^-(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} |\hat{q}(\xi) M(\nabla \hat{q})(\eta - \tau) \hat{q}(\phi(\tau) - \xi)| d\sigma(\xi) d\tau. \end{aligned}$$

Recuérdese que  $\hat{f} := M(\nabla \hat{q})$ . Se cumple

$$\widehat{\tilde{J}_1^1(q)}(\eta) = \frac{1}{|\eta|^2} \int_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon^+(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \hat{f}(\eta - \tau') |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\tau' - \xi)| |D\phi^{-1}(\tau')| d\sigma(\xi) d\tau'$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{|\eta|^2} \int_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon^+(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \hat{f}(\eta - \tau') |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\tau' - \xi)| d\sigma(\xi) d\tau' \\
&+ \frac{2}{|\eta|^2} \int_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon^+(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \hat{f}(\eta - \tau') |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\tau' - \xi)| \frac{|\tau' - \frac{\eta}{2}| - \frac{|\eta|}{2}}{|\tau' - \frac{\eta}{2}|} d\sigma(\xi) d\tau' \\
&\leq 3 \widehat{\tilde{K}(q)}(\eta),
\end{aligned}$$

con la notación

$$\widehat{\tilde{K}(q)}(\eta) := \int_{\Gamma_\infty(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \frac{\hat{f}(\eta - \tau') |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\tau' - \xi)|}{|\eta|^2} d\sigma(\xi) d\tau',$$

y

$$\Gamma_\infty(\eta) = \left\{ \tau' \in \mathbb{R}^2 : \left| \left| \tau' - \frac{\eta}{2} \right| - \frac{|\eta|}{2} \right| \leq 1 \right\}.$$

Aplicando el lema 2.2.3 y el lema B.4, tenemos

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}^{-1} \chi^* \mathcal{F} \tilde{K}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} &\leq C \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}} [\|q\|_{L^2} \|f\|_{L^2} + \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|f\|_{L^2} + \|f\|_{L^2} \|q\|_{L^2}] \\
&\leq C (\|q\|_{L^2}^2 + \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{L^2}) \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}}, \tag{2.2.32}
\end{aligned}$$

para cierta constante  $C = C(\varepsilon, \beta, q) > 0$ . Así, tenemos

$$\left\| \mathcal{F}^{-1} \chi^* \mathcal{F} \tilde{J}_1^1(q) \right\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C \left[ \|q\|_{L^2}^2 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}} + \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{L^2} \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}} \right]. \tag{2.2.33}$$

Se cumple

$$\begin{aligned}
\widehat{\tilde{J}_1^2(q)}(\eta) &\leq C \int_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon^-(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \frac{|\hat{q}(\xi)| M(\nabla \hat{q})(\eta - \tau) M\hat{q}(\tau - \xi)}{|\eta|^2} d\sigma(\xi) d\tau \\
&\leq C \int_{\Gamma_\infty(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \frac{|\hat{q}(\xi)| M(\nabla \hat{q})(\eta - \tau) M\hat{q}(\tau - \xi)}{|\eta|^2} d\sigma(\xi) d\tau
\end{aligned}$$

ya que si  $\tau \in \tilde{\Gamma}_\varepsilon^-(\eta)$ , entonces  $|\phi(\tau) - \tau| < 2 \times 2^{-N-1} |\eta| \leq 2$ , y por el lema B.1,

$$|\hat{q}(\phi(\tau) - \xi)| \leq C M\hat{q}(\tau - \xi),$$

para cierta constante  $C > 0$  que depende del  $\text{spt } q$ . De nuevo, por los lemas 2.2.3 y B.4, podemos escribir

$$\left\| \mathcal{F}^{-1} \chi^* \mathcal{F} \tilde{J}_1^2(q) \right\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\varepsilon, \beta, q) \left( \|q\|_{L^2}^2 + \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{L^2} \right) \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}}.$$

Esta última estimación y (2.2.33) conducen a

$$\left\| \mathcal{F}^{-1} \chi^* \mathcal{F} \tilde{J}_1(q) \right\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C \left[ \|q\|_{L^2}^2 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}} + \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{L^2} \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}} \right],$$

con  $C = C(\varepsilon, \beta, q)$ . Análogamente, por la estimación de Calderón,

$$\widehat{\tilde{J}_2(q)}(\eta) \leq \frac{C}{|\eta|^2} \int_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon^-(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau) M\nabla \hat{q}(\phi(\tau) - \xi)| d\sigma(\xi) d\tau$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{C}{|\eta|^2} \int_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon^-(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau) M \nabla \hat{q}(\tau - \xi)| d\sigma(\xi) d\tau \\
& \leq \frac{C}{|\eta|^2} \int_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon^-(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} |\hat{q}(\xi) M \hat{q}(\eta - \phi(\tau)) M \nabla \hat{q}(\phi(\tau) - \xi)| d\sigma(\xi) d\tau \\
& + \frac{C}{|\eta|^2} \int_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon^-(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau) M \nabla \hat{q}(\tau - \xi)| d\sigma(\xi) d\tau,
\end{aligned} \tag{2.2.34}$$

donde la última desigualdad se deduce del lema B.1 usando que

$$|\hat{q}(\eta - \tau)| \leq CM \hat{q}(\eta - \phi(\tau)).$$

Tomando el cambio de variable  $\tau' = \phi(\tau)$  en la integral (2.2.34) nos queda

$$\begin{aligned}
\widehat{\tilde{J}_2(q)}(\eta) & \leq \frac{C}{|\eta|^2} \int_{\Gamma_\infty(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} |\hat{q}(\xi) M \hat{q}(\eta - \tau') M \nabla \hat{q}(\tau' - \xi)| d\sigma(\xi) d\tau' \\
& + \frac{C}{|\eta|^2} \int_{\Gamma_\infty(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau) M \nabla \hat{q}(\tau - \xi)| d\sigma(\xi) d\tau.
\end{aligned}$$

Por fin, el lema 2.2.3 y el lema B.4 nos conducen a

$$\left\| \mathcal{F}^{-1} \chi^* \mathcal{F} \tilde{J}_2(q) \right\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\varepsilon, \beta, q) \left( \|q\|_{L^2}^2 + \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{L^2} \right) \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}},$$

para concluir que

$$\begin{aligned}
& \left\| \mathcal{F}^{-1} \chi^* \mathcal{F} Q''_\infty(q) \right\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \\
& \leq C \left[ \left\| \mathcal{F}^{-1} \chi^* \mathcal{F} \tilde{J}_1(q) \right\|_{\dot{W}^{\beta,2}} + \left\| \mathcal{F}^{-1} \chi^* \mathcal{F} \tilde{J}_2(q) \right\|_{\dot{W}^{\beta,2}} + \left\| \tilde{J}(q) \right\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \right] \\
& \leq C(\varepsilon, \beta, \delta_1, q) \left[ \|q\|_{L^2}^2 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}} + \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{L^2} \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}} \right],
\end{aligned}$$

suponiendo que  $0 < \beta + \varepsilon < 2$ .

Se cumple  $Q''(q) = \mathcal{F}^{-1} \left( [1 - \chi^*] \widehat{Q''(q)} \right) + \mathcal{F}^{-1} \left( \chi^* \widehat{Q''(q)} \right)$ , donde el primer término es una función que pertenece a la clase  $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ , y el segundo pertenece a  $\dot{W}^{\beta,2}(\mathbb{R}^2)$  en virtud de la estimación

$$\left\| \mathcal{F}^{-1} \chi^* \mathcal{F} Q''(q) \right\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\alpha, \beta, q) (\|q\|_{L^2}^2 + \|q\|_{L^2} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}) \|q\|_{\dot{W}^{\alpha,2}} \tag{2.2.35}$$

dato que  $\chi^* \leq \chi$  (por ser  $C_0 > 10$ ) y que se deduce al tomar  $\varepsilon = \alpha + 1 - \beta$  en (2.2.22), (2.2.27) y (2.2.28). Nótese que para ese  $\varepsilon$  en particular se cumple la condición  $1 \leq \beta + \varepsilon < 2$  puesto que  $0 \leq \alpha < 1$ . Para  $\beta = 0$  y  $\varepsilon = 1$  las estimaciones (2.2.22), (2.2.27), (2.2.28) nos dicen que

$$\mathcal{F}^{-1} \left( \chi^* \widehat{Q''(q)} \right) \in L^2(\mathbb{R}^2).$$

Hemos visto que  $Q''(q) \in W^{\beta,2}(\mathbb{R}^2) + C^\infty(\mathbb{R}^2)$  para cualquier  $\beta$  con  $0 \leq \beta < \alpha + 1$  siempre que  $\alpha$  y  $q$  estén en las hipótesis del teorema 1.5.3.

### 2.2.3. Resultados clave

En esta subsección enunciamos y demostramos algunos resultados esenciales para el control del término de dispersión triple  $Q_3(q)$  en 2d.

Empezamos con el siguiente lema que permite demostrar la afirmación (2.2.7) que resulta clave para acotar la norma del término esférico en el espacio  $\dot{W}^{\beta,2}(\mathbb{R}^2)$ .

**Lema 2.2.1.** *Sean  $\varepsilon > 0$  y  $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$ . Sea  $C_1 > 0$ . Denotamos*

$$F_k(\tau) := \int_{\Omega_k(\tau)} |\eta|^{2\beta-3+2\varepsilon} \int \int_{I_k(\eta)} |\hat{q}(\eta - \tau' - \xi')|^2 d\sigma(\tau') d\sigma(\xi') d\sigma(\eta), \quad (2.2.36)$$

$$H(\tau) := \int_{\Lambda(\tau)} |\eta|^{2\beta-3+2\varepsilon} \int_{\Gamma(\eta)} (M\hat{q}(\eta - 2\tau'))^2 d\sigma(\tau') d\sigma(\eta), \quad (2.2.37)$$

$$G(\tau) := \int_{\tilde{\Lambda}(\tau)} |\eta|^{2\beta-3+2\varepsilon} \int_{\Phi(\eta)} (M\hat{q}(\eta - \tau'))^2 d\sigma(\tau') d\sigma(\eta), \quad (2.2.38)$$

donde

$$\Omega_k(\tau) := \left\{ \eta \in \Lambda(\tau) : |\eta - \tau| \geq C_1 2^{-k} |\eta| \right\}, \quad (2.2.39)$$

$$\Phi(\eta) := \{ \tau' \in \Gamma(\eta) : |\tau'| \leq 1 \} \quad \text{y} \quad \tilde{\Lambda}(\tau) := \{ \eta \in \Lambda(\tau) : |\eta| \geq 10 \}, \quad (2.2.40)$$

y  $I_k(\eta)$  se define en (2.2.15). Entonces

(i) Si  $\tau \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ,  $F_k(\tau) \leq C(\varepsilon, \beta) \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}}^2$ , donde  $C(\varepsilon, \beta)$  sólo depende de  $\varepsilon$  y  $\beta$ .

(ii) Para todo  $\tau \in \mathbb{R}^2$  tal que  $|\tau| > 1$ , y para todos  $\beta, \varepsilon$  tales que  $0 < \beta + \varepsilon < 2$  existe una constante  $C(\varepsilon, \beta, q)$  sólo dependiente de  $\varepsilon, \beta$  y spt  $q$  que verifica

$$H(\tau) \leq C(\varepsilon, \beta, q) \left( \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}}^2 + \|q\|_{L^2}^2 |\tau|^{2\beta-2+2\varepsilon} \right),$$

(iii) Para todo  $\tau \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  tal que  $|\tau| \leq 1$ , y suponiendo que  $0 < \beta + \varepsilon < 2$ :

$$G(\tau) \leq C(\varepsilon, \beta, q) \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}}^2,$$

donde  $C(\varepsilon, \beta, q)$  sólo depende de  $\varepsilon, \beta$  y spt  $q$ .

**Nota.** Nótese que  $F_k(\tau)$  está uniformemente acotado en  $k$ .

#### Demostración del lema 2.2.1

• Prueba de (i). Para  $\tau$  fijo, establecemos un sistema de referencia ortonormal  $\{e_1, e_2\}$  de  $\mathbb{R}^2$  respecto del cual se escribe  $\tau = |\tau|e_1$ . Escribimos  $\eta = |\tau|e_1 + se_2$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , donde  $d\sigma(\eta) = ds$ . Sea  $h(s) := |\eta| = (|\tau|^2 + s^2)^{\frac{1}{2}}$ . Puesto que  $|s| \geq C_1 2^{-k} h(s)$ , tenemos que  $|s| \geq C_1 2^{-k} |\tau|$ . Se cumple

$$F_k(\tau) \leq \int_{|s| \geq C_1 2^{-k} |\tau|} h(s)^{2\beta-3+2\varepsilon} \int \int_{I_k(\eta(s))} |\hat{q}(\eta(s) - \tau' - \xi')|^2 d\sigma(\tau') d\sigma(\xi') ds.$$



Consideramos el cambio de variables dado por

$$\xi' = \frac{\eta(s)}{2} + \frac{h(s)}{2} v, \quad y \quad \tau' = \frac{\eta(s)}{2} + \frac{h(s)}{2} u,$$

con  $u, v \in S^1$ . Se cumple que  $d\sigma(\xi') = C h(s) d\sigma(v)$ , y  $d\sigma(\tau') = C h(s) d\sigma(u)$ . Puesto que  $|\eta(s) - \xi' - \tau'| \geq \frac{h(s)}{100}$ , sabemos que  $|u + v| \geq 1/50$ . Se cumple  $|u - v| \leq 4 \cdot 2^{-k}$ . Escribimos

$$\begin{aligned} F_k(\tau) &\leq C \int_{|s| \geq C_1 2^{-k} |\tau|} h(s)^{2\beta-1+2\varepsilon} \int_{S^1} \int_{A(v,k)} \left| \hat{q} \left( -\frac{h(s)}{2} (u+v) \right) \right|^2 d\sigma(u) d\sigma(v) ds \\ &\leq C \sum_{j=1}^{N_1 2^k} \int_{|s| \geq C_1 2^{-k} |\tau|} h(s)^{2\beta-1+2\varepsilon} \int_{A_j} \int_{\tilde{A}_j} \left| \hat{q} \left( -\frac{h(s)}{2} (u+v) \right) \right|^2 d\sigma(u) d\sigma(v) ds, \end{aligned}$$

donde  $A(v, k) := \{u \in S^1 : |u-v| \leq 4 \cdot 2^{-k} \text{ y } 1+u \cdot v \geq 1/5000\}$  y  $\{A_j : j \in \{1, 2, \dots, N_1 2^k\}\}$  es un recubrimiento de solapamiento finito de la circunferencia  $S^1$ . Cada  $A_j$  es un arco de diámetro  $2^{-k}/50$  y  $N_1$  una constante. También,

$$\tilde{A}_j := \{u \in S^1 : |u-v| \leq 4 \cdot 2^{-k}, |u+v| \geq 1/50, \text{ para algún } v \in A_j\}.$$

Dados  $v \in A_j$  y  $u \in \tilde{A}_j$  se verifica  $|u+v| \geq \frac{1}{100}$ . En efecto: sabemos que existe un  $v' \in A_j$  tal que  $|u+v'| \geq 1/50$  y tenemos

$$|u+v| \geq |u+v'| - |v-v'| \geq \frac{1}{50} - \text{diám } A_j = \frac{1}{50} - \frac{2^{-k}}{50} \geq \frac{1}{50} - \frac{1}{100} = \frac{1}{100}.$$

Parametrizamos la variable  $u$  como sigue

$$u = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2, \quad \theta \in [0, 2\pi),$$

con  $d\sigma(u) = d\theta$ . Por el teorema de Fubini,

$$F_k(\tau) \leq C \sum_{j=1}^{N_1 2^k} \int_{A_j} \int_{|s| \geq C_1 2^{-k} |\tau|} \int_{\{u(\theta) \in \tilde{A}_j\}} h(s)^{2\beta-1+2\varepsilon} \left| \hat{q} \left( -\frac{h(s)}{2} (u(\theta) + v) \right) \right|^2 d\theta ds d\sigma(v).$$

Para  $j \in \{1, \dots, N_1 2^k\}$  y  $v \in A_j$  fijos pero arbitrarios, aplicamos el cambio de variables  $(s, \theta) \rightarrow \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$  dado por

$$\lambda = -\frac{h(s)}{2} (u(\theta) + v) = -\frac{h(s)}{2} ((\cos \theta + v_1)e_1 + (\sin \theta + v_2)e_2).$$

Se cumple  $d\lambda = \frac{|s(1+u(\theta) \cdot v)|}{4} ds d\theta$ . Para cualquier  $j$ , sea el cono propio

$$H_j := \left\{ r \left( \frac{u+v}{2} \right) : r < 0, v \in A_j, u \in \tilde{A}_j \right\}.$$

La familia de conjuntos  $\{H_j : 1 \leq j \leq N_1 2^k\}$  tiene constante de solapamiento independiente de  $k$ . Para  $\theta$  en nuestro dominio de integración se cumple  $|u(\theta) + v| \geq \frac{1}{100}$  y, por tanto,  $h(s) \sim |\lambda|$ . Además,

$$1 + u(\theta) \cdot v = \frac{|u(\theta) + v|^2}{2} \geq \frac{1}{20000}.$$

Sabemos que para  $s$  con  $|s| \geq C_1 2^{-k} |\tau|$ , también se tiene<sup>3</sup>  $|s| \geq C(C_1) 2^{-k} h(s)$ . Se verifica  $\sigma(A_j) \sim 2^{-k}$ . Nos queda

$$\begin{aligned} F_k(\tau) &\leq C 2^k \sum_{j=1}^{N_1 2^k} \int_{A_j} \int_{H_j} |\lambda|^{2\beta-2+2\varepsilon} |\hat{q}(\lambda)|^2 d\lambda d\sigma(v) = C \sum_{j=1}^{N_1 2^k} \int_{H_j} |\lambda|^{2\beta-2+2\varepsilon} |\hat{q}(\lambda)|^2 d\lambda \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^2} |\lambda|^{2\beta-2+2\varepsilon} |\hat{q}(\lambda)|^2 d\lambda = C \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}}^2. \end{aligned}$$

• Prueba de (ii).

Seguimos las mismas líneas del punto anterior pero ahora no necesitamos el recubrimiento de solapamiento finito para  $S^1$ . La variable  $s$  toma valores reales en toda la recta real. De la misma forma, aplicamos el cambio  $\tau' = \frac{\eta(s)}{2} + \frac{h(s)}{2}u$ , con  $u \in S^1$  y parametrizamos  $u$  por  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Hacemos el cambio de variables  $(s, \theta) \rightarrow \lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$  dado por

$$\lambda = \eta(s) - 2\tau'(\theta) = -h(s)u(\theta) = -h(s)(\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2).$$

Ahora  $d\lambda = |s| ds d\theta = (h(s)^2 - |\tau|^2)^{\frac{1}{2}} ds d\theta$ , esto es,  $ds d\theta = \frac{d\lambda}{(|\lambda|^2 - |\tau|^2)^{\frac{1}{2}}}$ , y  $|\lambda| = h(s) \geq |\tau|$ . Así, obtenemos

$$\begin{aligned} H(\tau) &\leq \left( \int_{\{|\lambda| \geq (1+|\tau|^2)^{\frac{1}{2}}\}} + \int_{\{|\tau| \leq |\lambda| \leq (1+|\tau|^2)^{\frac{1}{2}}\}} \right) |\lambda|^{2\beta-2+2\varepsilon} M\hat{q}(\lambda)^2 \frac{d\lambda}{(|\lambda|^2 - |\tau|^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &=: J_1 + J_2. \end{aligned}$$

La primera integral no presenta dificultades, de hecho,  $J_1 \leq C \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}}^2$ , por el lema B.4 suponiendo que  $0 < \beta + \varepsilon < 2$ . Por la parte (2) del lema B.1,  $M\hat{q}(\lambda) \leq C \|q\|_{L^2}$  y tomando coordenadas polares obtenemos  $J_2 \leq C \|q\|_{L^2}^2 |\tau|^{2\beta-2+2\varepsilon}$ .

• Prueba de (iii).

Sea  $\tau \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  tal que  $|\tau| \leq 1$ . Siguiendo el mismo esquema que en el último punto, parametrizamos la variable  $\eta$  por  $s \in \mathbb{R}$ , hacemos el cambio  $\tau' = \frac{\eta(s)}{2} + \frac{h(s)}{2}u$ , con  $u \in S^1$ , y parametrizamos  $u$  por  $\theta \in (0, 2\pi]$ . Finalmente, hacemos el cambio  $(s, \theta) \rightarrow \lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ , dado por  $\lambda = \eta(s) - \tau'(\theta) = \frac{1}{2} [ (|\tau| - h(s) \cos \theta) e_1 + (s - h(s) \sin \theta) e_2 ]$ . En este caso, el Jacobiano de este cambio es  $ds d\theta = \frac{2}{|\lambda_2|} d\lambda_1 d\lambda_2$ . La condición  $|\tau|, |\tau'(\theta)| \leq 1$  garantiza que el ángulo que forman  $\tau - \eta(s)$  y  $\tau'(\theta) - \eta(s)$  está uniformemente acotado por un ángulo agudo. Recuerdese que  $h(s) \geq 10$ . Así,  $|\lambda_2| \sim |\lambda|$ . Esa condición también implica que existe una constante positiva  $C < 1$  tal que  $|\lambda| = |\eta(s) - \tau'(\theta)| \geq Ch(s)$ , luego  $h(s) \sim |\lambda|$ . Se cumple

$$G(\tau) \leq C \int_{\{\lambda \in \mathbb{R}^2: |\lambda| \geq C'\}} |\lambda|^{2\beta-2+2\varepsilon} M\hat{q}(\lambda)^2 \frac{d\lambda}{|\lambda|} \leq C \|\mathcal{F}^{-1}(M\hat{q})\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}}^2,$$

<sup>3</sup>De hecho, de la condición  $|s| \geq C_1 2^{-k} |\tau|$  se desprende la desigualdad

$$\frac{C_1}{(1 + (C_1)^2)^{\frac{1}{2}}} 2^{-k} h(s) \leq |s|.$$

y el lema B.4 acaba la prueba.

□

El lema siguiente resulta esencial para acotar el término  $Q_j''(q)$  en (2.2.21). Si ensanchamos la curva  $\Gamma(\eta)$  hasta el anillo  $\Gamma_\delta(\eta)$  definido abajo (fórmula (2.2.42)) en la integral en la variable  $\tau$  de la expresión del término esférico  $\widehat{Q'}(q)(\eta)$  en (2.2.4), cabe esperar que la regularidad de la transformada de Fourier inversa del término así obtenido sea la misma que la de  $Q'(q)$ . De hecho, este lema 2.2.2 se prueba de la misma manera que la prueba del control de  $Q'(q)$ .

**Lema 2.2.2.** *Sean  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$  tales que  $0 < \beta + \varepsilon < 2$  y  $q \in W^{\beta-1+\varepsilon,2}(\mathbb{R}^2)$  una función de soporte compacto. Escribimos*

$$\widehat{Q_\delta''}(q)(\eta) := \chi_{(\delta^{-1}, +\infty)}(|\eta|) \frac{1}{|\eta|^3} \int_{\Gamma_\delta(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau) \hat{q}(\tau - \xi)| d\sigma(\xi) d\tau, \quad (2.2.41)$$

donde  $\delta > 0$  y  $\Gamma_\delta(\eta)$  es el anillo dado por

$$\Gamma_\delta(\eta) := \left\{ \tau \in \mathbb{R}^2 : \left| \left| \tau - \frac{\eta}{2} \right| - \frac{|\eta|}{2} \right| \leq \delta |\eta| \right\}. \quad (2.2.42)$$

Entonces existen constantes  $\delta_1 > 0$ ,  $C(\varepsilon, \beta, \delta_1, spt q) > 0$ ,  $\gamma > 1$  tales que para todo  $\delta$  con  $0 < \delta \leq \delta_1$ :

$$\|Q_\delta''(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\varepsilon, \beta, \delta_1, spt q) \delta^\gamma \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}} \left( \|q\|_{L^2} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} + \|q\|_{L^2}^2 \right).$$

El siguiente resultado desempeña un papel fundamental para controlar el término central  $Q_\infty''(q)$  correspondiente a la parte singular próxima a  $\Gamma(\eta)$  en  $Q''(q)$ . Más concretamente, este lema se invoca justo después de aplicar la estimación de Calderón para evitar las singularidades y realizar las manipulaciones necesarias tomando cambios de variable y usando la parte (1) del lema B.1 para obtener las expresiones

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|\eta|^2} \int_{\Gamma_\infty(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} |\hat{q}(\xi) M \nabla \hat{q}(\eta - \tau) \hat{q}(\tau - \xi)| d\sigma(\xi) d\tau, \\ & \frac{1}{|\eta|^2} \int_{\Gamma_\infty(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} |\hat{q}(\xi) M \nabla \hat{q}(\eta - \tau) M \hat{q}(\tau - \xi)| d\sigma(\xi) d\tau, \\ & \frac{1}{|\eta|^2} \int_{\Gamma_\infty(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} |\hat{q}(\xi) M \hat{q}(\eta - \tau) M \nabla \hat{q}(\tau - \xi)| d\sigma(\xi) d\tau, \\ & \frac{1}{|\eta|^2} \int_{\Gamma_\infty(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau) M \nabla \hat{q}(\tau - \xi)| d\sigma(\xi) d\tau. \end{aligned}$$

A la vista de estos términos, el lema 2.2.3 siempre lo aplicamos en el caso en que la función que se aplica a  $\xi$  tiene la transformada inversa de soporte compacto y las funciones

que se aplican a  $\eta - \tau$  y  $\tau - \xi$  pueden ser el resultado de aplicar el operador maximal de Hardy-Littlewood a funciones cuya transformada inversa tiene soporte compacto. En particular, las funciones que tienen por argumento  $\eta - \tau$  y  $\tau - \xi$  no son necesariamente la transformada de Fourier de una función de soporte compacto. Dicho lema se prueba siguiendo las líneas de demostración del lema 2.2.2 como veremos en la subsección 2.2.5.

**Lema 2.2.3.** Sean  $f_1, f_2, f_3 \in W^{\alpha,2}(\mathbb{R}^2) \cap \dot{W}^{-\frac{1}{2},2}(\mathbb{R}^2)$ , donde  $0 \leq \alpha < 1$ . Supongamos que  $f_1$  tiene soporte compacto y que  $f_2, f_3$  no tienen por qué ser de soporte compacto. Sean también  $\beta < \alpha + 1$  y  $\varepsilon := \alpha + 1 - \beta$ . Denotamos

$$\mathcal{F}(Q''_*(f_1, f_2, f_3))(\eta) := \chi^*(\eta) \frac{1}{|\eta|^2} \int_{\Gamma_\infty(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} |\hat{f}_1(\xi) \hat{f}_2(\eta - \tau) \hat{f}_3(\tau - \xi)| d\sigma(\xi) d\tau,$$

donde  $\Gamma_\infty(\eta) = \{\tau \in \mathbb{R}^2 : ||\tau - \eta/2| - |\eta|/2| \leq 1\}$  y  $\chi^*$  se elige con  $C_0$  suficientemente grande. Entonces existe una constante  $C$  que sólo depende de  $\alpha, \beta$  y del  $\text{spt } f_1$  tal que  $\|Q''_*(f_1, f_2, f_3)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}$

$$\leq C \left[ \|f_1\|_{L^2} \|f_2\|_{L^2} \|f_3\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}} + \|f_1\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|f_2\|_{L^2} \|f_3\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}} + \|f_1\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}} \|f_2\|_{L^2} \|f_3\|_{L^2} \right].$$

**Nota 2.2.1.** Compárese este lema con el lema 2.2.2 en el caso  $\delta \sim |\eta|^{-1}$  con tres funciones diferentes. Considérese que esencialmente trabajamos con un término similar sobre un anillo con  $\delta \sim |\eta|^{-1}$ , y en la estimación afirmamos la misma ganancia de derivadas que en dicho lema.

## 2.2.4. Prueba del lema 2.2.2

Como ya adelantábamos en la subsección anterior, la estrategia que usaremos para probar el lema 2.2.2 consiste en seguir las líneas de demostración presentadas en la subsección 2.2.1 para acotar la norma del término esférico  $Q'(q)$  definido en (2.2.4). Al final de este apartado enunciamos y demostramos el lema 2.2.4, cuyo papel es fundamental en la prueba del lema 2.2.2.

Empezamos por dividir el dominio  $\Gamma_\delta(\eta) \times \Gamma(\eta)$  en dos subconjuntos:

$$\begin{aligned} I^\delta(\eta) &:= \left\{ (\tau, \xi) \in \Gamma_\delta(\eta) \times \Gamma(\eta) : |\xi - \tau| \geq \frac{|\eta|}{100} \right\} \quad \text{y} \\ II^\delta(\eta) &:= \left\{ (\tau, \xi) \in \Gamma_\delta(\eta) \times \Gamma(\eta) : |\xi - \tau| < \frac{|\eta|}{100} \right\}. \end{aligned}$$

Escribimos

$$\widehat{Q''_{I^\delta}(q)}(\eta) := \chi_{(\delta^{-1}, +\infty)}(|\eta|) \frac{1}{|\eta|^3} \int \int_{I^\delta(\eta)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau) \hat{q}(\tau - \xi)| d\sigma(\xi) d\tau,$$

y

$$\widehat{Q''_{II^\delta}(q)}(\eta) := \chi_{(\delta^{-1}, +\infty)}(|\eta|) \frac{1}{|\eta|^3} \int \int_{II^\delta(\eta)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau) \hat{q}(\tau - \xi)| d\sigma(\xi) d\tau,$$

para cualquier  $\eta \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , de modo que  $Q''_\delta(q) = Q''_{I^\delta_\delta}(q) + Q''_{II^\delta_\delta}(q)$ . Suponiendo que  $q$  tiene soporte compacto, vamos a demostrar las siguientes afirmaciones

$$\|Q''_{II^\delta_\delta}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\varepsilon, \beta, \delta_1) \delta^{1+\varepsilon} \left( \|q\|_{L^2} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} + \|q\|_{L^2}^2 \right) \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}}, \quad (2.2.43)$$

y si además  $0 < \beta + \varepsilon < 2$ ,

$$\|Q''_{I^\delta_\delta}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\varepsilon, \beta, \delta_1, q) \delta^{1+\frac{\varepsilon}{2}} \left( \|q\|_{L^2} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} + \|q\|_{L^2}^2 \right) \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}}, \quad (2.2.44)$$

para todo  $\delta$  con  $0 < \delta \leq \delta_1$ .

El lema 2.2.2 se desprende de estas dos afirmaciones (2.2.43) y (2.2.44).

### Demostración de la afirmación (2.2.43)

Hacemos  $II^\delta_\delta(\eta) \subset II^\delta_{<}(\eta) \cup II^\delta_{>}(\eta)$ , aplicando la condición  $|\xi - \tau| < \frac{|\eta|}{100}$  como en la prueba de (2.2.6), donde

$$II^\delta_{<}(\eta) := \left\{ (\tau, \xi) \in \Gamma_\delta(\eta) \times \Gamma(\eta) : |\xi - \tau| < \frac{|\eta|}{100}, |\xi|, |\tau| \leq \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{100} \right) |\eta| \right\}, \quad y$$

$$II^\delta_{>}(\eta) := \left\{ (\tau, \xi) \in \Gamma_\delta(\eta) \times \Gamma(\eta) : |\xi - \tau| < \frac{|\eta|}{100}, |\eta - \xi|, |\eta - \tau| \leq \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{100} \right) |\eta| \right\}.$$

Definimos

$$\widehat{Q''_{II^\delta_{<}}}(q)(\eta) := \chi_{(\delta^{-1}, +\infty)}(|\eta|) \frac{1}{|\eta|^3} \int \int_{II^\delta_{<}(\eta)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau) \hat{q}(\tau - \xi)| d\sigma(\xi) d\tau,$$

y  $\widehat{Q''_{II^\delta_{>}}}(q)(\eta)$  de manera obvia, cumpliéndose que  $\widehat{Q''_{II^\delta_\delta}}(q)(\eta) \leq \widehat{Q''_{II^\delta_{<}}}(q)(\eta) + \widehat{Q''_{II^\delta_{>}}}(q)(\eta)$ . Nótese que los términos  $\widehat{Q''_{II^\delta_{<}}}(q)(\eta)$ ,  $\widehat{Q''_{II^\delta_{>}}}(q)(\eta)$  no son simétricos, luego tendremos que acotarlos por separado.

*Estimación de la norma de  $Q''_{II^\delta_{<}}(q)$ .*

Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned} \|Q''_{II^\delta_{<}}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}^2 &\leq \int_{\{\eta \in \mathbb{R}^2: |\eta| > \delta^{-1}\}} |\eta|^{2\beta-6} \int \int_{II^\delta_{<}(\eta)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau)|^2 d\tau d\sigma(\xi) \\ &\quad \times \int \int_{II^\delta_{<}(\eta)} |\hat{q}(\tau' - \xi')|^2 d\tau' d\sigma(\xi') d\eta \end{aligned} \quad (2.2.45)$$

$$\leq \int_{\{\eta \in \mathbb{R}^2: |\eta| > \delta^{-1}\}} |\eta|^{2\beta-6} \int_{\Psi(\eta)} |\hat{q}(\xi)|^2 \quad (2.2.46)$$

$$\times \int_{\Psi_\delta(\eta) \cap B(\xi; \frac{|\eta|}{100})} |\hat{q}(\eta - \tau)|^2 d\tau d\sigma(\xi) F^\delta(\eta) d\eta, \quad (2.2.47)$$

donde

$$\begin{aligned}\Psi(\eta) &:= \{\xi \in \Gamma(\eta) : |\xi| \leq C_2|\eta|\}, \\ \Psi_\delta(\eta) &:= \{\tau \in \Gamma_\delta(\eta) : |\tau| \leq C_2|\eta|\}, \\ F^\delta(\eta) &= \int \int_{\Gamma(\eta) \times \Gamma_\delta(\eta)} |\hat{q}(\tau' - \xi')|^2 d\tau' d\sigma(\xi').\end{aligned}\tag{2.2.48}$$

y  $C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{100}$ . Puesto que

$$\begin{aligned}& \{(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : |\eta| > \delta^{-1}, \xi \in \Psi(\eta)\} \\ & \subset \{(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : |\eta| > \delta^{-1}, |\eta| \geq \frac{|\xi|}{C_2}, \eta \in \Lambda(\xi)\},\end{aligned}$$

y en virtud del lema B.2, podemos cambiar el orden de integración en  $\xi$  y  $\eta$  y estimar la expresión (2.2.46),(2.2.47) por

$$\begin{aligned}& \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\hat{q}(\xi)|^2}{|\xi|} \int_{\Omega_\delta(\xi)} |\eta|^{2\beta-5} \int_{\Psi_\delta(\eta) \cap B(\xi; \frac{|\eta|}{100})} |\hat{q}(\eta - \tau)|^2 d\tau F^\delta(\eta) d\sigma(\eta) d\xi \\ & \leq C\delta \|q\|_{L^2}^2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\hat{q}(\xi)|^2}{|\xi|} G_1^\delta(\xi) d\xi \\ & \leq C\delta^{2+2\varepsilon} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}^2 \|q\|_{L^2}^2 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}}^2,\end{aligned}\tag{2.2.49}$$

donde la última desigualdad se debe al apartado (i) del lema 2.2.4, que enunciamos y probamos más adelante en esta subsección,  $G_1^\delta(\xi)$  se define en (2.2.71), y

$$\Omega_\delta(\xi) := \{\eta \in \Lambda(\xi) : |\eta| > \delta^{-1}, |\eta| \geq \frac{|\xi|}{C_2}\}.\tag{2.2.50}$$

Para deducir la desigualdad en (2.2.49) hemos aplicado que  $F^\delta(\eta) \leq C\delta|\eta|^2\|q\|_{L^2}^2$ . Demostremos esta estimación. Tenemos

$$\begin{aligned}F^\delta(\eta) &= \int_{\Gamma(\eta)} \int_{\Gamma_\delta(\eta)} |\hat{q}(\tau' - \xi')|^2 d\tau' d\sigma(\xi') \\ &\leq \int_{\Gamma(\eta)} \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{q}(x)|^2 dx d\sigma(\xi') \leq C|\eta| \|q\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

donde hacemos el cambio de variables  $x = \tau' - \xi'$ , para cada  $\xi' \in \Gamma(\eta)$ . Teniendo en cuenta la condición  $|\eta| \geq \delta^{-1}$ , se obtiene

$$F^\delta(\eta) \leq C|\eta| \|q\|_{L^2}^2 \leq C|\eta| \|q\|_{L^2}^2 \delta|\eta| = C\delta|\eta|^2 \|q\|_{L^2}^2.$$

Hemos probado que existe una constante  $C > 0$  que no depende de  $\delta$  tal que:

$$\|Q''_{II_{\leq}}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C\delta^{1+\varepsilon} \|q\|_{L^2} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}}.\tag{2.2.51}$$

Estimación de la norma de  $Q''_{II_{>}^\delta}(q)$ .

De nuevo, en virtud de la desigualdad de Cauchy-Schwartz, cambiando el orden de integración en  $\xi$  y  $\eta$  por el lema B.2, y haciendo  $F^\delta(\eta) \leq C\delta|\eta|^2\|q\|_{L^2}^2$ , se tiene

$$\begin{aligned} & \|Q''_{II_{>}^\delta}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}^2 \\ & \leq C\delta\|q\|_{L^2}^2 \int_{E_\delta} \frac{|\hat{q}(\xi)|^2}{|\xi|} \int_{A(\xi)} |\eta|^{2\beta-3} \int_{\Gamma_\delta(\eta)} |\hat{q}(\eta-\tau)|^2 d\tau d\sigma(\eta) d\xi, \end{aligned} \quad (2.2.52)$$

donde

$$\begin{aligned} E_\delta &:= \left\{ \xi \in \mathbb{R}^2 : |\xi| \geq \sqrt{1-C_2^2} \delta^{-1} \right\}, \\ A(\xi) &= \left\{ \eta \in \Lambda(\xi) : |\xi| \leq |\eta| \leq (1-C_2^2)^{-\frac{1}{2}} |\xi| \right\}. \end{aligned}$$

En la integral en  $\eta$  de la expresión (2.2.52) podemos poner el dominio  $A(\xi)$  puesto que en la region  $II_{>}^\delta(\eta)$  se cumple que  $|\xi| \sim |\eta|$ :

$$|\xi| = (|\eta|^2 - |\eta - \xi|^2)^{\frac{1}{2}} \geq (|\eta|^2 - C_2^2|\eta|^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1-C_2^2} |\eta|.$$

Por otro lado, para todo  $\eta \in \Lambda(\xi)$ , tenemos

$$\int_{\Gamma_\delta(\eta)} |\hat{q}(\eta-\tau)|^2 d\tau \leq \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{q}(x)|^2 dx = \|q\|_{L^2}^2.$$

Además, si  $\xi \in E_\delta$  se verifica  $\sigma(A(\xi)) \leq C|\xi|$ , y  $|\xi|^{-1-2\epsilon} \leq (1-C_2^2)^{-(1+2\epsilon)/2} \delta^{1+2\epsilon}$ . Por todo ello, podemos acotar la expresión (2.2.52) por

$$\begin{aligned} & C\delta\|q\|_{L^2}^4 \int_{E_\delta} \frac{|\hat{q}(\xi)|^2}{|\xi|} |\xi|^{2\beta-3} \sigma(A(\xi)) d\xi \leq C\delta\|q\|_{L^2}^4 \int_{E_\delta} |\hat{q}(\xi)|^2 |\xi|^{2\beta-3} d\xi \\ & = C\delta\|q\|_{L^2}^4 \int_{E_\delta} |\hat{q}(\xi)|^2 |\xi|^{2\beta-2+2\epsilon} |\xi|^{-1-2\epsilon} d\xi \leq C(\epsilon)\delta^{2+2\epsilon} \|q\|_{L^2}^4 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\epsilon,2}}^2. \end{aligned}$$

Hemos probado la estimación

$$\|Q''_{II_{>}^\delta}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\epsilon) \delta^{1+\epsilon} \|q\|_{L^2}^2 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\epsilon,2}},$$

que junto con (2.2.51) nos conduce a la afirmación (2.2.43).

□

### Demostración de la afirmación (2.2.44)

Aplicando el cambio de variables  $\tau = \eta - \tau'$  en la integral

$$\int \int_{I^\delta(\eta)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau') \hat{q}(\tau' - \xi)| d\sigma(\xi) d\tau',$$

deducimos que

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{Q}''_{I^\delta}(q)}(\eta) &= \chi_{(\delta^{-1}, +\infty)}(|\eta|) \frac{1}{|\eta|^3} \\ &\quad \times \int \int_{\{(\tau, \xi) \in \Gamma_\delta(\eta) \times \Gamma(\eta) : |\xi - (\eta - \tau)| \geq \frac{|\eta|}{100}\}} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\tau) \hat{q}(\eta - \tau - \xi)| d\sigma(\xi) d\tau. \end{aligned}$$

Obsévese que si  $|\eta| \geq 2$  podemos escribir

$$\{(\tau, \xi) \in \Gamma_\delta(\eta) \times \Gamma(\eta) : |\xi - (\eta - \tau)| \geq \frac{|\eta|}{100}\} = \bigcup_{k=1}^{\lfloor \log_2 |\eta| \rfloor} I_k^\delta(\eta) \cup I_\infty^\delta(\eta),$$

donde para cada  $k$  tal que  $1 \leq k \leq \lfloor \log_2 |\eta| \rfloor$ :

$$\begin{aligned} I_k^\delta(\eta) &:= \left\{ (\tau, \xi) \in \Gamma_\delta(\eta) \times \Gamma(\eta) : |\xi - \tau| \sim 2^{-k} |\eta|, |\xi - (\eta - \tau)| \geq \frac{|\eta|}{100} \right\}, \\ I_\infty^\delta(\eta) &:= \left\{ (\tau, \xi) \in \Gamma_\delta(\eta) \times \Gamma(\eta) : |\xi - \tau| \leq 1, |\xi - (\eta - \tau)| \geq \frac{|\eta|}{100} \right\}. \end{aligned}$$

Para todo  $k \in \{1, 2, \dots\}$  definimos

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{Q}''_{I_k^\delta}(q)}(\eta) &:= \chi_{(\delta^{-1}, +\infty)}(|\eta|) \chi_{\{|\eta| \geq 2^k\}}(\eta) \frac{1}{|\eta|^3} \int \int_{I_k^\delta(\eta)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\tau) \hat{q}(\eta - \tau - \xi)| d\sigma(\xi) d\tau, \\ \widehat{\mathcal{Q}''_{I_\infty^\delta}(q)}(\eta) &:= \chi_{(\delta^{-1}, +\infty)}(|\eta|) \frac{1}{|\eta|^3} \int \int_{I_\infty^\delta(\eta)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\tau) \hat{q}(\eta - \tau - \xi)| d\sigma(\xi) d\tau. \end{aligned}$$

Si  $|\eta| \geq 2$  ( $\delta_1 \leq \frac{1}{2}$ ) se tiene:

$$\widehat{\mathcal{Q}''_{I^\delta}(q)}(\eta) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \widehat{\mathcal{Q}''_{I_k^\delta}(q)}(\eta) + \widehat{\mathcal{Q}''_{I_\infty^\delta}(q)}(\eta),$$

y por la desigualdad de Minkowski,

$$\|\mathcal{Q}''_{I^\delta}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \|\mathcal{Q}''_{I_k^\delta}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} + \|\mathcal{Q}''_{I_\infty^\delta}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}.$$

Afirmamos que para  $\varepsilon > 0$  y  $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$ :

$$\|\mathcal{Q}''_{I_k^\delta}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C \delta^{1+\varepsilon/2} 2^{-k\varepsilon/2} \|q\|_{L^2}^2 \left( \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}} + \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{3}{2}+\varepsilon,2}} \right), \quad (2.2.44a)$$

y también

$$\|\mathcal{Q}''_{I_\infty^\delta}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq \begin{cases} A, & \text{si } 1 < \beta + \varepsilon < 2, \\ B, & \text{si } 0 < \beta + \varepsilon < 2, \end{cases} \quad (2.2.44b)$$

donde

$$\begin{aligned} A &:= C \delta^{1+\varepsilon} \|q\|_{L^2} \left( \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}} + \|q\|_{L^2} \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{3}{2}+\varepsilon,2}} + \|q\|_{L^2} \|q\|_{\dot{W}^{\beta-2+\varepsilon,2}} \right), \\ B &:= C \delta^{1+\varepsilon} \|q\|_{L^2} \left( \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}} + \|q\|_{L^2} \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{3}{2}+\varepsilon,2}} + \|q\|_{L^2} \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}} \right). \end{aligned}$$



**Demostración de la estimación (2.2.44a)**

Consideramos la descomposición  $I_k^\delta(\eta) = I_k^{1,\delta}(\eta) \cup I_k^{2,\delta}(\eta)$ , donde

$$I_k^{1,\delta}(\eta) := \left\{ (\tau, \xi) \in I_k^\delta(\eta) : |\tau - \eta| \geq 2^{-k} \frac{|\eta|}{100} \right\}, \quad (2.2.53)$$

$$I_k^{2,\delta}(\eta) := \left\{ (\tau, \xi) \in I_k^\delta(\eta) : |\tau - \eta| \leq 2^{-k} \frac{|\eta|}{100} \right\}. \quad (2.2.54)$$

Para  $j \in \{1, 2\}$ , denotamos

$$\begin{aligned} \widehat{Q''_{I_k^{j,\delta}}(q)}(\eta) &:= \chi_{(\delta^{-1}, +\infty)}(|\eta|) \chi_{\{|\eta| \geq 2^k\}}(\eta) \frac{1}{|\eta|^3} \\ &\quad \times \int \int_{I_k^{j,\delta}(\eta)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\tau) \hat{q}(\eta - \tau - \xi)| d\sigma(\xi) d\tau. \end{aligned}$$

• Empezamos con el término  $Q''_{I_k^{1,\delta}}(q)$ . Vamos a probar la siguiente estimación:

$$\|Q''_{I_k^{1,\delta}}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C \delta^{1+\frac{\varepsilon}{2}} 2^{-k\varepsilon/2} \|q\|_{L^2}^2 \left( \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}} + \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{3}{2}+\varepsilon,2}} \right). \quad (2.2.55)$$

Hacemos una división más:

$$I_k^{1,\delta}(\eta) = I_{k,a}^{1,\delta}(\eta) \cup I_{k,b}^{1,\delta}(\eta), \text{ donde} \quad (2.2.56)$$

$$I_{k,a}^{1,\delta}(\eta) := \left\{ (\tau, \xi) \in I_k^{1,\delta}(\eta) : |\tau| > |\eta - \tau| \right\}, \quad (2.2.57)$$

$$I_{k,b}^{1,\delta}(\eta) := \left\{ (\tau, \xi) \in I_k^{1,\delta}(\eta) : |\tau| \leq |\eta - \tau| \right\}.$$

Usamos las notaciones  $\widehat{Q_{I_{k,a}^{1,\delta}}(q)}(\eta)$ ,  $\widehat{Q_{I_{k,b}^{1,\delta}}(q)}(\eta)$ , con el significado obvio multiplicando por las funciones características  $\chi_{(\delta^{-1}, +\infty)}(|\eta|)$ ,  $\chi_{\{|\eta| \geq 2^k\}}(\eta)$ , de manera que

$$\widehat{Q_{I_k^{1,\delta}}(q)}(\eta) = \widehat{Q_{I_{k,a}^{1,\delta}}(q)}(\eta) + \widehat{Q_{I_{k,b}^{1,\delta}}(q)}(\eta).$$

Por razones técnicas, si  $k \geq \log_2(1/1000\delta)$  el término  $Q_{I_{k,a}^{1,\delta}}(q)$  debemos dividirlo en dos más:

$$Q_{I_{k,a}^{1,\delta}}(q) = Q_{I_{k,a,1}^{1,\delta}}(q) + Q_{I_{k,a,2}^{1,\delta}}(q),$$

donde para  $j \in \{1, 2\}$ :

$$\begin{aligned} \widehat{Q_{I_{k,a,j}^{1,\delta}}(q)}(\eta) &:= \chi_{(\delta^{-1}, +\infty)}(|\eta|) \chi_{\{|\eta| \geq 2^k\}}(\eta) \frac{1}{|\eta|^3} \\ &\quad \times \int \int_{I_{k,a,j}^{1,\delta}(\eta)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\tau) \hat{q}(\eta - \xi - \tau)| d\sigma(\xi) d\tau, \end{aligned}$$

y además,

$$I_{k,a,1}^{1,\delta}(\eta) := \left\{ (\tau, \xi) \in I_{k,a}^{1,\delta}(\eta) : 2^{-k} \frac{|\eta|}{100} \leq |\eta - \tau| \leq 10\delta|\eta| \right\},$$

$$I_{k,a,2}^{1,\delta}(\eta) := \left\{ (\tau, \xi) \in I_{k,a}^{1,\delta}(\eta) : |\eta - \tau| \geq 10\delta|\eta| \right\}.$$

**Nota 2.2.2.** Si  $k < \log_2(1/1000\delta)$  (es decir,  $2^{-k} \frac{|\eta|}{100} > 10\delta|\eta|$ ) basta restringirnos al término  $Q_{I_{k,a,2}^{1,\delta}}(q)$ , puesto que  $I_{k,a}^{1,\delta}(\eta) \subset I_{k,a,2}^{1,\delta}(\eta)$ .

Empecemos por el caso  $I_{k,a,1}^{1,\delta}(\eta)$ . Las condiciones  $|\eta| \geq \delta^{-1}$ ,  $|\eta| \geq 2^k$  implican que  $|\eta|^{-\varepsilon/2} \leq \delta^{\varepsilon/2}$ ,  $|\eta|^{-\varepsilon/2} \leq 2^{-k\varepsilon/2}$ . Luego  $|\eta|^{-\varepsilon} < \delta^{\varepsilon/2} 2^{-k\varepsilon/2}$ . Teniendo en cuenta esto y por la desigualdad de Cauchy-Schwartz:

$$\widehat{Q_{I_{k,a,1}^{1,\delta}}}(q)(\eta) \leq \delta^{\varepsilon/2} 2^{-k\varepsilon/2} |\eta|^{-3+\varepsilon} \left( \int \int_{I_{k,a,1}^{1,\delta}(\eta)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\tau)|^2 d\sigma(\xi) d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.2.58)$$

$$\times \left( \int \int_{I_{k,a,1}^{1,\delta}(\eta)} |\hat{q}(\eta - \tau' - \xi')|^2 d\sigma(\xi') d\tau' \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.2.59)$$

Para  $(\tau, \xi) \in I_{k,a,1}^{1,\delta}(\eta)$ , se cumple  $|\xi| \sim |\eta|$  con constante dependiente de  $\delta_1 < 1/1000$ . En efecto:

$$|\eta| \geq |\xi| \geq |\eta - \tau - \xi| - |\eta - \tau| \geq \frac{|\eta|}{100} - 10\delta|\eta| \geq \left( \frac{1}{100} - 10\delta_1 \right) |\eta|.$$

Por tanto, para cada  $\eta$  fijo, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \int \int_{I_{k,a,1}^{1,\delta}(\eta)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\tau)|^2 d\sigma(\xi) d\tau &\leq \int_{\Gamma_\delta(\eta)} |\hat{q}(\tau)|^2 d\tau \int_{\{\xi \in \Gamma(\eta) : |\xi| \geq (\frac{1}{100} - 10\delta_1)|\eta|\}} |\hat{q}(\xi)|^2 d\sigma(\xi) \\ &\leq \|q\|_{L^2}^2 \int_{\{\xi \in \Gamma(\eta) : |\xi| \geq (\frac{1}{100} - 10\delta_1)|\eta|\}} |\hat{q}(\xi)|^2 d\sigma(\xi). \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} &\int \int_{I_{k,a,1}^{1,\delta}(\eta)} |\hat{q}(\eta - \tau' - \xi')|^2 d\sigma(\xi') d\tau' \\ &\leq \int_{\Gamma(\eta)} \int_{\Gamma_\delta(\eta)} |\hat{q}(\eta - \tau' - \xi')|^2 d\tau' d\sigma(\xi') \\ &\leq \int_{\Gamma(\eta)} \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{q}(x)|^2 dx d\sigma(\xi') = \pi |\eta| \|q\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

En virtud de las estimaciones que acabamos de ver tenemos

$$\begin{aligned} \|Q_{I_{k,a,1}^{1,\delta}}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}^2 &\leq C \delta^{2+\varepsilon} 2^{-k\varepsilon} \|q\|_{L^2}^4 \int_{|\eta| \geq \delta^{-1}} |\eta|^{2\beta-3+2\varepsilon} \\ &\quad \times \int_{\{\xi \in \Gamma(\eta) : |\xi| \geq (\frac{1}{100} - 10\delta_1)|\eta|\}} |\hat{q}(\xi)|^2 d\sigma(\xi) d\eta \\ &= C \delta^{2+\varepsilon} 2^{-k\varepsilon} \|q\|_{L^2}^4 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\hat{q}(\xi)|^2}{|\xi|} \\ &\quad \times \int_{\{\eta \in \Lambda(\xi) : |\xi| \geq (\frac{1}{100} - 10\delta_1)|\eta|\}} |\eta|^{2\beta-2+2\varepsilon} d\sigma(\eta) d\xi \\ &\leq C \delta^{2+\varepsilon} 2^{-k\varepsilon} \|q\|_{L^2}^4 \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{q}(\xi)|^2 |\xi|^{2\beta-2+2\varepsilon} d\xi, \end{aligned}$$

donde se aplica el lema B.2, la propiedad  $|\xi| \sim |\eta|$ , y que la medida del conjunto

$$\left\{ \eta \in \Lambda(\xi) : |\xi| \geq \left( \frac{1}{100} - 10\delta_1 \right) |\eta| \right\}$$

es del orden de  $|\xi|$ . Queda vista la siguiente estimación

$$\|Q_{I_{k,a,1}^{1,\delta}}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C \delta^{1+\varepsilon/2} 2^{-k\varepsilon/2} \|q\|_{L^2}^2 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}}. \quad (2.2.60)$$

Sigamos ahora con el caso  $I_{k,a,2}^{1,\delta}(\eta)$ . Para cada  $\eta$  fijo, acotando por el operador maximal de Hardy-Littlewood por la parte (1) del lema B.4 y análogamente a la estimación (2.2.18), tenemos

$$\int \int_{I_{k,a,2}^{1,\delta}(\eta)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\tau)|^2 d\sigma(\xi) d\tau \leq C \|q\|_{L^2}^2 \int_{\{\tau \in \Gamma_\delta(\eta) : |\eta-\tau| \geq 10\delta|\eta|, |\tau| > |\eta-\tau|\}} |\hat{q}(\tau)|^2 d\tau.$$

Por todo ello, aprovechando que  $|\eta| \geq \delta^{-1}$  y cambiando el orden de integración en las variables  $\tau, \eta$ , por el teorema de Fubini, se cumple

$$\begin{aligned} \|Q_{I_{k,a,2}^{1,\delta}}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}^2 &\leq C \delta^{1+\varepsilon} 2^{-k\varepsilon} \|q\|_{L^2}^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{q}(\tau)|^2 G_2^\delta(\tau) d\tau \\ &\leq C \delta^{2+\varepsilon} 2^{-k\varepsilon} \|q\|_{L^2}^4 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}}^2, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se desprende del apartado (ii) del lema 2.2.4 y  $G_2^\delta(\tau)$  se define en (2.2.72). Hemos visto que

$$\|Q_{I_{k,a,2}^{1,\delta}}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C \delta^{1+\frac{\varepsilon}{2}} 2^{-k\varepsilon/2} \|q\|_{L^2}^2 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}}. \quad (2.2.61)$$

De las estimaciones (2.2.60), (2.2.61) y por la nota 2.2.2 llegamos a que para cualquier entero  $k \geq 1$  se cumple

$$\|Q_{I_{k,a}^{1,\delta}}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C \delta^{1+\frac{\varepsilon}{2}} 2^{-k\varepsilon/2} \|q\|_{L^2}^2 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}}. \quad (2.2.62)$$

Por otra parte, siguiendo los mismos pasos que en el caso  $I_{k,a,2}^{1,\delta}(\eta)$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \|Q_{I_{k,b}^{1,\delta}}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}^2 &\leq C \delta^\varepsilon 2^{-k\varepsilon} \|q\|_{L^2}^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{q}(\tau)|^2 G_3^\delta(\tau) d\tau \\ &\leq C \delta^{2+\varepsilon} 2^{-k\varepsilon} \|q\|_{L^2}^4 \left( 2^{-k} \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}}^2 + \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{3}{2}+\varepsilon,2}}^2 \right), \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se desprende del apartado (iii) del lema 2.2.4 y  $G_3^\delta(\tau)$  se define en (2.2.73). Aplicando la sencilla fórmula  $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ , para  $a, b \geq 0$ , y obviando el factor  $2^{-k}$ , llegamos a

$$\|Q_{I_{k,b}^{1,\delta}}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C \delta^{1+\varepsilon/2} 2^{-k\varepsilon/2} \|q\|_{L^2}^2 \left( \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}} + \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{3}{2}+\varepsilon,2}} \right). \quad (2.2.63)$$

A partir de (2.2.62) y (2.2.63) se deduce (2.2.55).

- Seguimos con el término  $Q''_{I_k^{2,\delta}}(q)$ . En este caso vamos a ver la estimación siguiente

$$\|Q''_{I_k^{2,\delta}}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C \delta^{1+\varepsilon/2} 2^{-k\varepsilon/2} \|q\|_{L^2}^2 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{3}{2}+\varepsilon,2}}. \quad (2.2.64)$$

Aquí también usamos que  $|\eta|^{-\varepsilon} \leq \delta^{\varepsilon/2} 2^{-k\varepsilon/2}$ . Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwartz como en (2.2.58),(2.2.59), teniendo en cuenta que si  $(\tau, \xi) \in I_k^{2,\delta}(\eta)$  (con  $k \geq 1$ ) y  $|\eta| \geq \delta^{-1}$  se cumple

$$\begin{aligned} |\xi| &\geq |\xi - (\eta - \tau)| - |\eta - \tau| \geq \frac{|\eta|}{100} - 2^{-k} \frac{|\eta|}{100} \geq \frac{|\eta|}{200}, \\ |\eta - \xi| &\geq |\tau - \xi| - |\eta - \tau| \geq 2^{-k-1} |\eta| - 2^{-k} \frac{|\eta|}{100} = \frac{49}{100} 2^{-k} |\eta| \geq \frac{49}{100} 2^{-k} \delta^{-1}, \end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned} &\int \int_{I_k^{2,\delta}(\eta)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\tau)|^2 d\sigma(\xi) d\tau \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{q}(\tau)|^2 d\tau \int_{\{\xi \in \Gamma(\eta) : |\eta| \leq 200|\xi|, |\eta - \xi| \geq \frac{49}{100} 2^{-k} \delta^{-1}\}} |\hat{q}(\xi)|^2 d\sigma(\xi), \end{aligned}$$

y cambiando el orden de integración en  $\xi$  y  $\eta$  por el lema B.2, se obtiene

$$\begin{aligned} \|Q''_{I_k^{2,\delta}}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}^2 &\leq C \delta^\varepsilon 2^{-k\varepsilon} \|q\|_{L^2}^2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\hat{q}(\xi)|^2}{|\xi|} \\ &\quad \times \int_{\{\eta \in \Lambda(\xi) : |\eta| \leq 200|\xi|, |\eta - \xi| \geq \frac{49}{100} 2^{-k} \delta^{-1}\}} |\eta|^{2\beta-5+2\varepsilon} \\ &\quad \times \int \int_{I_k^{2,\delta}(\eta)} |\hat{q}(\eta - \xi' - \tau')|^2 d\sigma(\xi') d\tau' d\sigma(\eta) d\xi \\ &\leq C \delta^\varepsilon 2^{-k\varepsilon} \|q\|_{L^2}^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{q}(\xi)|^2 G_4^\delta(\xi) d\xi \\ &\leq C \delta^{2+\varepsilon} 2^{-k\varepsilon} \|q\|_{L^2}^4 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{3}{2}+\varepsilon,2}}^2. \end{aligned} \quad (2.2.65)$$

El apartado (iv) del lema 2.2.4 explica la última desigualdad y la expresión  $G_4^\delta(\xi)$  se define en (2.2.74). La desigualdad en (2.2.65) se deduce de la propiedad  $|\xi| \sim |\eta|$ . Queda vista la estimación (2.2.64).

De las estimaciones (2.2.55) y (2.2.64) se deduce la estimación (2.2.44a).

□

### **Demostración de la estimación (2.2.44b)**

Hagamos una descomposición más. Escribimos  $I_\infty^\delta(\eta) = I_\infty^{1,\delta}(\eta) \cup I_\infty^{2,\delta}(\eta)$ , donde

$$\begin{aligned} I_\infty^{1,\delta}(\eta) &:= \left\{ (\tau, \xi) \in I_\infty^\delta(\eta) : |\xi| > 1 \right\}, \\ I_\infty^{2,\delta}(\eta) &:= \left\{ (\tau, \xi) \in I_\infty^\delta(\eta) : |\xi| \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Para  $j \in \{1, 2\}$ , denotamos

$$\widehat{Q''_{I_\infty^{1,\delta}}(q)}(\eta) := \chi_{(\delta^{-1}, +\infty)}(|\eta|) \frac{1}{|\eta|^3} \int \int_{I_\infty^{1,\delta}(\eta)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\tau) \hat{q}(\eta - \tau - \xi)| d\sigma(\xi) d\tau.$$

- Empecemos con el término  $Q''_{I_\infty^{1,\delta}}(q)$ .

Aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwartz como en (2.2.58),(2.2.59). La integral en  $\tau$  que nos queda la acotamos usando la identidad de Plancherel:

$$\int_{\Gamma_\delta(\eta)} |\hat{q}(\tau)|^2 d\tau \leq \|q\|_{L^2}^2.$$

Para  $(\tau', \xi') \in I_\infty^{1,\delta}(\eta)$  se tiene  $|(\eta - \xi' - \tau') - (\eta - 2\xi')| = |\xi' - \tau'| \leq 1$ , entonces, por el apartado (1) del **lema B.1**,

$$|\hat{q}(\eta - \xi' - \tau')| \leq CM \hat{q}(\eta - 2\xi'),$$

verificándose

$$\begin{aligned} \int \int_{I_\infty^{1,\delta}(\eta)} |\hat{q}(\eta - \xi' - \tau')|^2 d\tau' d\sigma(\xi') &\leq C \int_{\Gamma(\eta)} (M \hat{q}(\eta - 2\xi'))^2 \mathcal{L}^2(B(\xi', 1)) d\sigma(\xi') \\ &= C \int_{\Gamma(\eta)} (M \hat{q}(\eta - 2\xi'))^2 d\sigma(\xi'). \end{aligned}$$

Por todo ello, usando que si  $|\eta| > \delta^{-1}$  entonces  $|\eta|^{-2-2\epsilon} \leq \delta^{2+2\epsilon}$ , y cambiando el orden de integración en las variables  $\xi, \eta$  por el lema B.2, obtenemos

$$\begin{aligned} \|Q''_{I_\infty^{1,\delta}}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}^2 &\leq C \delta^{2+2\epsilon} \|q\|_{L^2}^2 \int_{\{\xi \in \mathbb{R}^2: |\xi| > 1\}} \frac{|\hat{q}(\xi)|^2}{|\xi|} H(\xi) d\xi \\ &\leq C \delta^{2+2\epsilon} \|q\|_{L^2}^2 \left( \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}^2 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\epsilon,2}}^2 + \|q\|_{L^2}^2 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{3}{2}+\epsilon,2}}^2 \right), \end{aligned}$$

donde la función  $H$  se define en (2.2.37) y la última desigualdad se deduce del apartado (ii) del lema 2.2.1, suponiendo que  $0 < \beta + \epsilon < 2$ . Hemos probado que

$$\|Q''_{I_\infty^{1,\delta}}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C \delta^{1+\epsilon} \|q\|_{L^2} \left( \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\epsilon,2}} + \|q\|_{L^2} \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{3}{2}+\epsilon,2}} \right), \quad (2.2.66)$$

suponiendo que  $0 < \beta + \epsilon < 2$ .

• Vamos a estimar el término  $Q''_{I_\infty^{2,\delta}}(q)$ . Volvemos a hacer Cauchy-Schwartz como en (2.2.58),(2.2.59). Es fácil ver que

$$\int \int_{I_\infty^{2,\delta}(\eta)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\tau)|^2 d\sigma(\xi) d\tau \leq C \|q\|_{L^2}^4.$$

Puesto que si  $(\tau', \xi') \in I_\infty^{2,\delta}(\eta)$  entonces  $|\eta - \xi' - \tau' - (\eta - \tau')| = |\xi'| \leq 1$ , por el **lema B.1**  $|\hat{q}(\eta - \xi' - \tau')| \leq CM \hat{q}(\eta - \tau')$ . Además,  $(\tau', \xi') \in I_\infty^{2,\delta}(\eta)$  también implica que  $|\eta - \tau'| \sim |\eta|$ :

$$|\eta| \geq |\eta - \tau'| \geq |\eta| - |\tau'| \geq |\eta| - 2 \geq (1 - 2\delta_1)|\eta|,$$

teniendo presente que  $|\tau'| \leq |\xi' - \tau'| + |\xi'| \leq 2$ , y que  $|\eta| > \delta^{-1} \geq \delta_1^{-1}$ . Aplicando de nuevo que  $|\eta|^{-2-2\varepsilon} \leq \delta^{2+2\varepsilon}$ , la acotación  $|\eta - \tau'| \geq (1 - 2\delta_1)\delta_1^{-1}$ , y el teorema de Fubini, tenemos

$$\begin{aligned} \|Q''_{I_\infty^{2,\delta}}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}^2 &\leq C\delta^{2+2\varepsilon}\|q\|_{L^2}^4 \int_{\mathbb{R}^2} |\eta|^{2\beta-4+2\varepsilon} \int_{\{|\tau'| \leq 2, |\eta-\tau'| \sim |\eta|\}} |M\hat{q}(\eta - \tau')|^2 d\tau' d\eta \\ &\leq C\delta^{2+2\varepsilon}\|q\|_{L^2}^4 \int_{|\tau'| \leq 2} \int_{|\eta-\tau'| \geq C} |\eta - \tau'|^{2\beta-4+2\varepsilon} |M\hat{q}(\eta - \tau')|^2 d\eta d\tau' \\ &= C\delta^{2+2\varepsilon}\|q\|_{L^2}^4 \int_{|x| \geq C} |x|^{2\beta-4+2\varepsilon} |M\hat{q}(x)|^2 dx. \end{aligned} \quad (2.2.67)$$

Por el lema B.4, sabemos que la integral en (2.2.67) está acotada por  $C\|q\|_{\dot{W}^{\beta-2+\varepsilon,2}}^2$ , si  $1 < \beta + \varepsilon < 3$ . Y si  $0 < \beta + \varepsilon < 2$ :

$$\int_{\{|x| \geq C\}} |x|^{2\beta-4+2\varepsilon} |M\hat{q}(x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} |x|^{2\beta-2+2\varepsilon} |M\hat{q}(x)|^2 dx \leq C\|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}}^2.$$

Luego, hemos demostrado lo siguiente

$$\|Q''_{I_\infty^{2,\delta}}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq \begin{cases} C\delta^{1+\varepsilon} \|q\|_{L^2}^2 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-2+\varepsilon,2}}, & \text{si } 1 < \beta + \varepsilon < 3, \\ C\delta^{1+\varepsilon} \|q\|_{L^2}^2 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}}, & \text{si } 0 < \beta + \varepsilon < 2. \end{cases} \quad (2.2.68)$$

La estimación (2.2.44b) se obtiene a partir de (2.2.66) y (2.2.68).  $\square$

Es evidente que de la demostración de (2.2.44a) se puede deducir la estimación

$$\|Q''_{I_k^\delta}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C\delta^{1+\varepsilon/2} 2^{-k\varepsilon/2} \|q\|_{L^2}^2 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}}. \quad (2.2.69)$$

También se obtiene fácilmente de la prueba de (2.2.44b):

$$\|Q''_{I_\infty^\delta}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C\delta^{1+\varepsilon} \left( \|q\|_{L^2}^2 + \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{L^2} \right) \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}}. \quad (2.2.70)$$

Finalmente, de las estimaciones (2.2.69), (2.2.70) se desprende la afirmación (2.2.44).  $\square$

Para concluir la demostración del lema 2.2.2 sólo nos queda probar el siguiente lema.

**Lema 2.2.4.** Sean  $\xi, \tau \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  y  $k \geq 1, \varepsilon > 0$ . Recordemos que  $C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{100}$ . Denotamos

$$G_1^\delta(\xi) := \int_{\Omega_\delta(\xi)} |\eta|^{2\beta-3} \int_{\Psi_\delta(\eta) \cap B(\xi; \frac{|\eta|}{100})} |\hat{q}(\eta - \tau)|^2 d\tau d\sigma(\eta), \quad (2.2.71)$$

$$G_2^\delta(\tau) := \int_{\Lambda_\delta(\tau)} |\eta|^{2\beta-5+2\varepsilon} \int \int_{I_{k,a}^{1,\delta}(\eta)} |\hat{q}(\eta - \xi' - \tau')|^2 d\sigma(\xi') d\tau' d\eta, \quad (2.2.72)$$

$$G_3^\delta(\tau) := \int_{\Lambda_\delta^k(\tau)} |\eta|^{2\beta-6+2\varepsilon} \int \int_{I_k^{1,\delta}(\eta)} |\hat{q}(\eta - \xi' - \tau')|^2 d\sigma(\xi') d\tau' d\eta, \quad (2.2.73)$$

$$G_4^\delta(\xi) := \int_{\Lambda_{\delta,k}^*(\xi)} |\eta|^{2\beta-6+2\varepsilon} \int \int_{I_k^{2,\delta}(\eta)} |\hat{q}(\eta - \xi' - \tau')|^2 d\sigma(\xi') d\tau' d\sigma(\eta), \quad (2.2.74)$$

donde  $\Omega_\delta(\xi)$ ,  $\Psi_\delta(\eta)$  se definen en (2.2.50), (2.2.48) y  $I_{k,a}^{1,\delta}(\eta)$ ,  $I_k^{1,\delta}(\eta)$ ,  $I_k^{2,\delta}(\eta)$  en (2.2.56), (2.2.53), (2.2.54), respectivamente, y además

$$\Lambda_\delta(\tau) := \{ \eta \in \mathbb{R}^2 : \tau \in \Gamma_\delta(\eta), |\eta - \tau| \geq 10\delta|\eta|, |\tau| > |\eta - \tau| \}, \quad (2.2.75)$$

$$\Lambda_\delta^k(\tau) := \{ \eta \in \mathbb{R}^2 : |\eta| \geq \delta^{-1}, \tau \in \Gamma_\delta(\eta), |\eta - \tau| \geq \frac{2^{-k}}{100} |\eta|, |\tau| \leq |\eta - \tau| \}, \quad (2.2.76)$$

$$\Lambda_{\delta,k}^*(\xi) := \{ \eta \in \Lambda(\xi) : |\eta - \xi| \geq \frac{49}{100} 2^{-k} \delta^{-1} \}.$$

Entonces existen  $\delta_1 > 0$ ,  $C = C(\delta_1) > 0$  tales que para todo  $\delta \in \mathbb{R}$  con  $0 < \delta \leq \delta_1$  se cumple:

- (i)  $G_1^\delta(\xi) \leq C \delta^{1+2\varepsilon} \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}}^2$ .
- (ii)  $G_2^\delta(\tau) \leq C \delta \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}}^2$ .
- (iii)  $G_3^\delta(\tau) \leq C \delta^2 \left( 2^{-k} \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon,2}}^2 + \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{3}{2}+\varepsilon,2}}^2 \right)$ .
- (iv)  $G_4^\delta(\xi) \leq C \delta^2 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{3}{2}+\varepsilon,2}}^2$ .

#### Demostración del lema 2.2.4

• Prueba de (i). Sea  $\{e_1, e_2\}$  una referencia ortonormal en  $\mathbb{R}^2$ , tal que  $\xi = |\xi|e_1$ . Escribimos  $\eta = |\xi|e_1 + se_2$ , donde  $s \in \mathbb{R}$ ,  $d\sigma(\eta) = ds$ , y  $h(s) := |\eta| = (|\xi|^2 + s^2)^{\frac{1}{2}}$ . Sea  $l(\xi) := ((C_2)^{-2} - 1)^{\frac{1}{2}} |\xi|$ . Se cumple que

$$h(s) \geq |\xi|/C_2 \Leftrightarrow |s| \geq l(\xi).$$

Tenemos

$$G_1^\delta(\xi) \leq \delta^{2\varepsilon} \int_{|s| \geq l(\xi)} h(s)^{2\beta-3+2\varepsilon} \int_{\Psi_\delta(\eta(s)) \cap B(\xi; \frac{h(s)}{100})} |\hat{q}(\eta(s) - \tau)|^2 d\tau ds, \quad (2.2.77)$$

Para todo  $s$  fijo, hacemos el cambio de variables  $\tau = (\tau_1, \tau_2) \rightarrow (t, \theta)$  dado por

$$\tau = \frac{\eta(s)}{2} + t \frac{h(s)}{2} u(\theta),$$

donde  $u(\theta) = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$ , con  $|t - 1| < 2\delta$  y  $\theta \in [0, 2\pi)$ . El término jacobiano es  $d\tau = \frac{1}{4} t h(s)^2 dt d\theta$ . Para cada  $t$ , existen ángulos  $\gamma_1(s, t)$ ,  $\gamma_2(s, t)$  tales que

$$0 \leq \gamma_1(s, t) < \gamma_2(s, t) \leq 2\pi,$$

y

$$|\tau| \leq C_2 h(s) \Leftrightarrow \gamma_1(s, t) \leq \theta \leq \gamma_2(s, t).$$

La fórmula (2.2.77) está acotada por

$$C \delta^{2\varepsilon} \int_{|s| \geq l(\xi)} \int_{1-2\delta}^{1+2\delta} t \int_{\gamma_1(s,t)}^{\gamma_2(s,t)} \left| \hat{q} \left( \frac{\eta(s)}{2} - t \frac{h(s)}{2} u(\theta) \right) \right|^2 h(s)^{2\beta-1+2\varepsilon} d\theta dt ds$$

$$= C\delta^{2\varepsilon} \int_{1-2\delta}^{1+2\delta} t \int_{|s| \geq l(\xi)} \int_{\gamma_1(s,t)}^{\gamma_2(s,t)} \left| \hat{q} \left( \frac{\eta(s)}{2} - t \frac{h(s)}{2} u(\theta) \right) \right|^2 h(s)^{2\beta-1+2\varepsilon} d\theta ds dt. \quad (2.2.78)$$

Para  $t$  fijo, consideramos el cambio de variables polares  $(s, \theta) \rightarrow \lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$  dado por

$$\lambda = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = \eta(s) - \tau = \frac{|\xi| - th(s) \cos \theta}{2} e_1 + \frac{s - th(s) \sin \theta}{2} e_2.$$

Calculemos el término jacobiano:

$$\frac{\partial(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial(s, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{-st \cos \theta}{2h(s)} & \frac{th(s) \sin \theta}{2} \\ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{ts \sin \theta}{h(s)} \right) & \frac{-th(s) \cos \theta}{2} \end{vmatrix} = \frac{th(s)}{4} \left( \frac{st}{h(s)} - \sin \theta \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{s(t^2 - 1)}{2} + \lambda_2 \right),$$

y de lucimos  $d\theta ds = \frac{2}{\left| \frac{s(t^2 - 1)}{2} + \lambda_2 \right|} d\lambda_1 d\lambda_2$ . Es cierto que  $h(s) \sim |\lambda|$ :

$$h(s) \leq |\eta(s) - \tau| + |\tau| \leq |\lambda| + C_2 h(s) \Rightarrow [1 - C_2] h(s) \leq |\lambda| \leq (1 + \delta_1) h(s).$$

Además, se verifica

$$\left| \frac{s(t^2 - 1)}{2} + \lambda_2 \right| \geq |\lambda_2| - \left| \frac{s(t^2 - 1)}{2} \right| \geq C|\lambda| - C'\delta|\lambda| \geq C|\lambda| - C'\delta_1|\lambda| = C(\delta_1)|\lambda|,$$

debido a que  $|\lambda| \sim |\lambda_2|$  y a las desigualdades  $|s| \leq (|\xi|^2 + s^2)^{\frac{1}{2}} = h(s) \leq \frac{1}{1-C_2} |\lambda|$ , y

$$|t^2 - 1| = (t+1)|t-1| \leq (2+2\delta)2\delta = 4\delta + 4\delta^2 < 8\delta.$$

Nótese que elegimos  $\delta_1$  tal que  $C - C'\delta_1 > 0$ . Demostremos que  $|\lambda| \sim |\lambda_2|$ . Consideramos dos casos. En primer lugar, supongamos que

$$\max\{|\xi|, |\tau|\} \geq \frac{|\eta|}{2}.$$

En este caso, las condiciones  $C_2|\eta| \geq |\tau|, |\xi|$  y  $|\xi - \tau| \leq \frac{|\eta|}{100}$  implican que  $\xi, \tau$  están en un único semiplano de los dos determinados por  $\eta$ ,  $H^1 := \{\xi \in \mathbb{R}^2 : \xi \cdot \nu > 0\}$  y  $H^2 := \{\xi \in \mathbb{R}^2 : \xi \cdot \nu < 0\}$ , donde  $\nu = (-\eta_2, \eta_1)$ . Suponiendo que  $\xi, \tau \in H^1$ , se cumple que el ángulo  $\gamma$  entre  $\tau - \eta$  y  $\xi - \eta$  es menor o igual que un ángulo del orden  $\gamma_{\max}^0 + O(\delta)$ , cuando  $\delta \rightarrow 0$ , donde  $\gamma_{\max}^0$  es el ángulo entre  $\rho - \eta$  y  $\tilde{\rho} - \eta$ , donde  $\rho, \tilde{\rho} \in H^1 \cap \Gamma(\eta)$  y  $|\rho| = \frac{|\eta|}{2} - \frac{|\eta|}{100} = \frac{49}{100} |\eta|$ ,  $|\tilde{\rho}| = C_2 |\eta|$ . Se tiene

$$0 < \gamma_{\max}^0 \leq \frac{\pi}{2} - \tilde{\gamma} \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{12},$$

donde  $\tilde{\gamma}$  es el ángulo entre  $-\eta$  y  $\rho - \eta$ , ya que  $\sin \tilde{\gamma} = \frac{49}{100} \geq \sin \frac{\pi}{12}$ , y esto implica  $\tilde{\gamma} \geq \frac{\pi}{12}$ . El caso  $\xi, \tau \in H^2$  es idéntico sólo que  $\rho, \tilde{\rho} \in H^2$ .

Supongamos ahora que  $\max\{|\xi|, |\tau|\} \leq \frac{|\eta|}{2}$ . Sean  $\rho'$  y  $\tilde{\rho}'$  los únicos puntos de  $\Gamma(\eta)$  que distan  $\frac{|\eta|}{2}$  del origen. Entonces el ángulo entre  $\tau - \eta$  y  $\xi - \eta$  es menor o igual que un ángulo del orden  $\gamma_{\max}^1 + O(\delta)$ , cuando  $\delta \rightarrow 0$ , donde  $\gamma_{\max}^1$  es el ángulo entre  $\rho' - \eta$  y  $\tilde{\rho}' - \eta$  y vale  $\frac{\pi}{3}$ .



Por tanto, las condiciones  $\tau \in \Gamma_\delta(\eta)$ ,  $\xi \in \Gamma(\eta)$ ,  $|\xi|, |\tau| \leq C_2|\eta|$ ,  $|\tau - \xi| \leq \frac{|\eta|}{100}$  implican que

$$|\lambda| \geq |\lambda_2| = |\lambda| \cos \gamma \geq |\lambda| \cos(\gamma_{\max} + O(\delta)) \geq |\lambda| \cos(\gamma_{\max} + C\delta_1),$$

donde  $\gamma_{\max} = \max\{\gamma_{\max}^0, \gamma_{\max}^1\} = \frac{5\pi}{12}$  y la constante  $\cos(\gamma_{\max} + C\delta_1)$  es positiva porque  $0 < \gamma_{\max} + C\delta_1 < \frac{\pi}{2}$  (para  $\delta_1$  suficientemente pequeño). Hemos probado que  $|\lambda| \sim |\lambda_2|$ .

Se verifica fácilmente que  $\int_{1-2\delta}^{1+2\delta} t \, dt = 4\delta$ . La expresión (2.2.78) está acotada por

$$C \delta^{1+2\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{q}(\lambda)|^2 |\lambda|^{2\beta-2+2\varepsilon} d\lambda.$$

• Prueba de (ii). Para un  $\eta \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  fijo, se puede probar que

$$\sup_{\substack{\tau \in \Gamma_\delta(\eta) \\ |\tau| > |\eta - \tau|}} |\tau - \tau_0| = \frac{1 + \delta}{\left(\frac{1}{2} + \delta + \delta^2\right)^{\frac{1}{2}}} \delta |\eta|,$$

donde  $\tau_0$  es la proyección de  $\tau$  sobre  $\Gamma(\eta)$  que verifica

$$\tau_0 = \lambda \tau, \text{ para cierta } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ y } \tau \cdot (\eta - \tau_0) = 0.$$

Puesto que el máximo de la función  $(1 + \delta) / (1/2 + \delta + \delta^2)^{\frac{1}{2}}$  vale  $\sqrt{2}$ , para  $\delta \geq 0$ , podemos escribir, para todo  $\tau \in \Gamma_\delta(\eta)$ , con  $|\tau| > |\eta - \tau|$ :

$$|\tau - \tau_0| \leq \sqrt{2}\delta|\eta| < \sqrt{2}\delta 2|\tau| < 4\delta|\tau|.$$

Sea  $\{e_1, e_2\}$  una referencia ortonormal del plano tal que  $\tau = |\tau|e_1$ . Para  $\eta \in \Lambda_\delta(\tau)$ , tomamos el cambio de variable  $(\eta_1, \eta_2) \rightarrow (r, s)$  dado por  $\eta = \tau_0 + (\eta - \tau_0) = re_1 + se_2$ , donde  $\tau_0 = re_1$ ,  $\eta - \tau_0 = se_2$ ,  $d\sigma(\eta) = dr ds$  y

$$(1 - 4\delta)|\tau| < |\tau| - |\tau - \tau_0| \leq r \leq |\tau| + |\tau - \tau_0| < (1 + 4\delta)|\tau|.$$

Sea  $\gamma$  el ángulo entre  $\tau - \eta$  y  $\tau_0 - \eta$ . Entonces

$$|s| = |\eta - \tau| \cos \gamma \geq C'|\eta - \tau| \geq C'10\delta|\eta| \geq C(\delta_1)\delta|\tau|, \quad (2.2.79)$$

ya que  $\sin \gamma = |\tau - \tau_0|/|\eta - \tau| \leq \sqrt{2}\delta|\eta|/|\eta - \tau| \leq \sqrt{2}/10$ . La última desigualdad en (2.2.79) usa que  $|\tau| \leq (1 + \delta_1)|\eta|$ . Así,

$$\begin{aligned} G_2^\delta(\tau) &\leq C \int_{(1-4\delta)|\tau|}^{(1+4\delta)|\tau|} \int_{|s| \geq C(\delta_1)\delta|\tau|} h(s, r)^{2\beta-5+2\varepsilon} \\ &\quad \times \int \int_{I_{k,a}^{1,\delta}(\eta(r,s))} |\hat{q}(re_1 + se_2 - \tau' - \xi')|^2 d\sigma(\xi') d\tau' ds dr, \end{aligned}$$

donde  $h(s, r) := |\eta| = (r^2 + s^2)^{\frac{1}{2}}$ . No vamos a utilizar las relaciones que satisfacen  $\xi'$  y  $\tau'$  entre sí que dependen de  $k$ . Para  $r$  fijo, hacemos los cambios  $\xi' = \frac{\eta(s, r)}{2} + \frac{h(s, r)}{2} v$ ,

$\tau' = \frac{\eta(s,r)}{2} + t \frac{h(s,r)}{2} u$ , donde  $v \in S^1$ ,  $|t-1| < 2\delta$  y  $u = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$ , donde  $\theta \in \Theta(t, v)$  y para cada  $t, v$  definimos el dominio  $\Theta(t, v) := \{\theta \in [0, 2\pi) : \frac{1}{50} \leq |v + tu(\theta)|\}$ , consecuente con la condición de partida  $|\eta - \xi' - \tau'| \geq |\eta|/100$ . Se cumple

$$d\sigma(\xi') d\tau' = C t h(s, r)^3 d\sigma(v) ds d\theta.$$

Tenemos

$$\begin{aligned} G_2^\delta(\tau) &\leq C \int_{(1-4\delta)|\tau|}^{(1+4\delta)|\tau|} \int_{|s| \geq C(\delta_1)\delta|\tau|} h(s, r)^{2\beta-2+2\varepsilon} \int_{1-2\delta}^{1+2\delta} t \\ &\quad \times \int_{S^1} \int_{\Theta(t, v)} \left| \hat{q}\left(-\frac{h(s, r)}{2}(tu(\theta) + v)\right) \right|^2 d\theta d\sigma(v) dt ds dr. \end{aligned}$$

Con  $v, r, t$  fijos, hacemos el cambio de variables  $(\theta, s) \leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2)$  dado por

$$\lambda = \eta - \xi' - \tau' = -\frac{h(s, r)}{2}(tu(\theta) + v) \quad (2.2.80)$$

$$= -\frac{h(s, r)}{2} [(t \cos \theta + v_1)e_1 + (t \sin \theta + v_2)e_2]. \quad (2.2.81)$$

Se verifica  $d\lambda = \frac{|s|t|t+u \cdot v|}{4} ds d\theta$ . De la condición  $|\xi' - (\eta - \tau')| > \frac{h(s, r)}{100}$  deducimos que si  $\gamma_1$  es el ángulo entre  $\xi' - \frac{\eta}{2}$  y  $\tau' - \frac{\eta}{2}$ , entonces existe un ángulo  $\gamma_2$  con  $0 < \gamma_2 < \pi$  tal que  $0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2$ , y

$$1 + u(\theta) \cdot v = 1 + \cos \gamma_1 \geq 1 + \cos \gamma_2 > 0.$$

Tenemos

$$t + u \cdot v \geq 1 - 2\delta_1 + u \cdot v = (1 + u \cdot v) - 2\delta_1 \geq 1 + \cos \gamma_2 - 2\delta_1,$$

donde la constante  $1 + \cos \gamma_2 - 2\delta_1$  es estrictamente positiva para un  $\delta_1$  adecuado. Puesto que  $\theta \in \Theta(t, v)$ , se verifica

$$\frac{1}{50} \leq |tu(\theta) + v| \leq t + 1 \leq 2(1 + \delta_1),$$

y, por tanto,  $|\lambda| = \frac{h(s, r)}{2} |tu(\theta) + v| \sim h(s, r)$ . Se obtiene

$$\begin{aligned} G_2^\delta(\tau) &\leq C \int_{S^1} \int_{(1-4\delta)|\tau|}^{(1+4\delta)|\tau|} \int_{1-2\delta}^{1+2\delta} \int_{\mathbb{R}^2} |\lambda|^{2\beta-2+2\varepsilon} |\hat{q}(\lambda)|^2 \frac{d\lambda}{\delta|\tau|} dt dr d\sigma(v) \\ &\leq C\delta \int_{\mathbb{R}^2} |\lambda|^{2\beta-2+2\varepsilon} |\hat{q}(\lambda)|^2 d\lambda. \end{aligned}$$

• Prueba de (iii). Proyectamos  $\tau$  sobre  $\Gamma(\eta)$  desde  $\eta$ . Más precisamente,  $\tau_0$  es la proyección de  $\tau$  sobre  $\Gamma(\eta)$  en el sentido de que  $\tau_0 \in \Gamma(\eta)$ ,  $\tau_0 - \eta = \lambda(\tau - \eta)$ , para algún escalar  $\lambda$ , de forma que  $\tau_0 \cdot (\eta - \tau) = 0$ . Escribimos  $\eta$  en términos de  $\tau \in \mathbb{R}^2$  fijo como sigue:

$$\eta = \tau_0 + (\eta - \tau_0) = \tau_0 + r(\tau - \tau_0),$$

donde  $|r| \gg 1$  y  $\tau_0 = (\tau \cdot \omega)\omega$ , con  $\omega := \frac{\tau_0}{|\tau_0|}$ . Nótese que  $|\eta - \tau_0| = |r| |\tau - \tau_0|$ . Por simetría con el caso anterior, si  $\tau \in \Gamma_\delta(\eta)$  y  $|\tau| \leq |\eta - \tau|$  se verifica

$$|\tau - \tau_0| \leq \sqrt{2}\delta|\eta|. \quad (2.2.82)$$

Para determinar el rango de valores que toma  $r$  debemos observar que si  $\tau \in \Gamma_\delta(\eta)$  y  $|\tau| \leq |\eta - \tau|$  entonces

$$|\eta - \tau| \geq (\sqrt{2} + \varepsilon)\delta|\eta|, \quad (2.2.83)$$

para cierto  $\varepsilon = \varepsilon(\delta_1) > 0$ . Para entender esto tengamos en cuenta que para un  $\tau$  así, se verifica

$$|\eta - \tau| \geq \sqrt{\frac{1}{2} + \delta^2 - \delta}|\eta|,$$

y además

$$\sqrt{\frac{1}{2} + \delta^2 - \delta} \geq (\sqrt{2} + \varepsilon)\delta,$$

para todo  $\delta \in \mathbb{R}$  tal que  $0 < \delta \leq \delta_1$ , con

$$\delta_1 < \frac{-1 + \sqrt{3 + 2\varepsilon^2 + 4\sqrt{2}\varepsilon}}{2 + 2\varepsilon^2 + 4\sqrt{2}\varepsilon}.$$

Podemos escribir

$$\begin{aligned} |r| &= \frac{|\eta - \tau_0|}{|\tau - \tau_0|} \geq \frac{|\eta - \tau| - |\tau - \tau_0|}{|\tau - \tau_0|} \geq \frac{|\eta - \tau| - \sqrt{2}\delta|\eta|}{\sqrt{2}\delta|\eta|} \\ &\geq \frac{C'(\delta_1)|\eta - \tau|}{\delta|\eta|} \geq \frac{C'(\delta_1)2^{-k}|\eta|/100}{\delta|\eta|} = C(\delta_1)2^{-k}\delta^{-1}, \end{aligned}$$

donde es oportuno aclarar que la primera desigualdad de la segunda línea se deduce a partir de la propiedad (2.2.83). De hecho, dicha propiedad implica

$$|\eta - \tau| - \sqrt{2}\delta|\eta| \geq \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \varepsilon(\delta_1)}\right) |\eta - \tau|.$$

Elegimos la misma referencia ortonormal de  $\mathbb{R}^2$  que en (ii). Expresamos  $\eta \in \Lambda_\delta^k(\tau)$  respecto de esta referencia. Parametrizamos  $\omega$  por  $\gamma$ :

$$\omega = \cos \gamma e_1 + \sin \gamma e_2.$$

Teniendo en cuenta que  $\tau = |\tau|e_1$  y  $\tau_0 = (\tau \cdot \omega)\omega = |\tau|\cos^2 \gamma e_1 + |\tau|\cos \gamma \sin \gamma e_2$ , se cumple:

$$\begin{aligned} \eta &= (\tau \cdot \omega)\omega + r(\tau - (\tau \cdot \omega)\omega) \\ &= (|\tau|\cos^2 \gamma + r|\tau|(1 - \cos^2 \gamma))e_1 + (|\tau|\cos \gamma \sin \gamma - r|\tau|\cos \gamma \sin \gamma)e_2 \\ &= |\tau|[(\cos^2 \gamma + r\sin^2 \gamma)e_1 + (1 - r)\cos \gamma \sin \gamma e_2]. \end{aligned}$$

Calculemos el término jacobiano del cambio de variables  $(\eta_1, \eta_2) \rightarrow (r, \gamma)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\eta_1, \eta_2)}{\partial(r, \gamma)} &= |\tau|^2 \begin{vmatrix} \sin^2 \gamma & \sin(2\gamma)(r-1) \\ -\cos \gamma \sin \gamma & -\cos(2\gamma)(r-1) \end{vmatrix} \\ &= |\tau|^2 \left( \sin^2 \gamma \cos(2\gamma)(1-r) + \frac{1}{2} \sin^2(2\gamma)(r-1) \right) \\ &= |\tau|^2 (r-1) \sin^2 \gamma, \end{aligned}$$

de forma que  $d\eta = |\tau|^2 |r-1| \sin^2 \gamma dr d\gamma$ . Tenemos

$$\begin{aligned} G_3^\delta(\tau) &\leq \int_{|r| \geq C(\delta_1) 2^{-k} \delta^{-1}} \int_{D_\tau^\delta(r)} h(r, \gamma)^{2\beta-6+2\varepsilon} |\tau|^2 |r-1| \sin^2 \gamma \\ &\quad \times \int \int_{I_k^{1,\delta}(\eta(r, \gamma))} |\hat{q}(\eta(r, \gamma) - \xi' - \tau')|^2 d\sigma(\xi') d\tau' d\gamma dr, \end{aligned}$$

donde  $h(r, \gamma) := |\eta| = |\tau|(\cos^2 \gamma + r^2 \sin^2 \gamma)^{\frac{1}{2}}$  y  $D_\tau^\delta(r) := \{\gamma \in [0, 2\pi) : h(r, \gamma) \geq \delta^{-1}\}$ . Para  $r, \gamma$  fijos, consideramos los mismos cambios que en el caso anterior para  $\xi', \tau'$ , y obtenemos

$$\begin{aligned} G_3^\delta(\tau) &\leq C \int_{|r| > C(\delta_1) 2^{-k} \delta^{-1}} \int_{D_\tau^\delta(r)} \int_{1-2\delta}^{1+2\delta} \int_{S^1} \int_{\Theta_k(t, v)} t h(r, \gamma)^{2\beta-3+2\varepsilon} |\tau|^2 \\ &\quad \times |r-1| \sin^2 \gamma \left| \hat{q} \left( -\frac{h(r, \gamma)}{2} (v + tu(\theta)) \right) \right|^2 d\theta d\sigma(v) dt d\gamma dr \\ &\leq C \sum_{j=1}^{N_2 2^k} \int_{|r| > C(\delta_1) 2^{-k} \delta^{-1}} \int_{D_\tau^\delta(r)} \int_{1-2\delta}^{1+2\delta} \int_{B_j} \int_{\tilde{\Theta}_j(t)} t h(r, \gamma)^{2\beta-3+2\varepsilon} |\tau|^2 \\ &\quad \times |r-1| \sin^2 \gamma \left| \hat{q} \left( -\frac{h(r, \gamma)}{2} (v + tu(\theta)) \right) \right|^2 d\theta d\sigma(v) dt d\gamma dr, \end{aligned}$$

donde  $\{B_j : j \in \{1, 2, 3, \dots, N_2 2^k\}\}$  es un recubrimiento de solapamiento finito para la circunferencia unitaria  $S^1$  tal que cada  $B_j$  es un arco de diámetro  $\frac{2^{-k}}{50}$ , y  $N_2$  una constante adecuada. Además, para cada  $v \in S^1$  y  $t \in [1-2\delta, 1+2\delta]$ , definimos

$$\Theta_k(t, v) := \{\theta \in [0, 2\pi) : |v - tu(\theta)| \leq 2^{-k+2}, |v + tu(\theta)| \geq \frac{1}{50}\}. \quad (2.2.84)$$

Para  $j, t$  fijos definimos el dominio  $\tilde{\Theta}_j(t)$  para  $\theta$  como sigue:

$$\tilde{\Theta}_j(t) := \{\theta \in [0, 2\pi) : |v - tu(\theta)| \leq 2^{-k+2}, |v + tu(\theta)| \geq \frac{1}{50} \text{ para algún } v \in B_j\}. \quad (2.2.85)$$

En esta notación (2.2.85) omitimos la dependencia de  $k$  por simplicidad. Obsérvese que si  $v \in B_j$  y  $\theta \in \tilde{\Theta}_j(t)$  entonces  $|v + tu(\theta)| \geq \frac{1}{100}$ . Para comprobarlo téngase en cuenta que existe un  $v' \in B_j$  tal que  $|v' + tu(\theta)| \geq \frac{1}{50}$ . Luego,

$$|v + tu(\theta)| \geq |v' + tu(\theta)| - |v - v'| \geq \frac{1}{50} - \frac{2^{-k}}{50} \geq \frac{1}{100}.$$

De ahí se deduce que existe un ángulo  $\gamma_2 \in (0, \pi)$  tal que  $0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 < \pi$ , donde  $\gamma_1$  es el ángulo que forman  $u(\theta)$  y  $v$ .

Para  $j, \gamma, v, t$  fijos, aplicamos el cambio de variables  $(\theta, r) \rightarrow (\lambda_1, \lambda_2) = \lambda$  análogo a (2.2.80), (2.2.81), donde el dominio para  $\lambda$  está contenido en el cono propio dado por

$$H_j^*(t) := \{-\rho(tu(\theta) + v) : \rho > 0, v \in B_j, \theta \in \tilde{\Theta}_j(t)\}. \quad (2.2.86)$$

La familia de conjuntos  $\{H_j^*(t) : 1 \leq j \leq N_2 2^k\}$  tiene una constante de solapamiento independiente de  $k$ . Calculemos el término jacobiano. Se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial(r, \theta)} &= \frac{1}{4} \begin{vmatrix} \frac{\partial h(r, \gamma)}{\partial r}(v_1 + t \cos \theta) & -h(r, \gamma)t \sin \theta \\ \frac{\partial h(r, \gamma)}{\partial r}(v_2 + t \sin \theta) & h(r, \gamma)t \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{4} t h(r, \gamma) \frac{\partial h(r, \gamma)}{\partial r} (u(\theta) \cdot v + t), \end{aligned}$$

donde  $\frac{\partial h(r, \gamma)}{\partial r} = |\tau| \frac{r \sin^2 \gamma}{(\cos^2 \gamma + r^2 \sin^2 \gamma)^{\frac{1}{2}}}$ . Esto es,

$$d\lambda = \frac{t h(r, \gamma) |u(\theta) \cdot v + t| |\tau| |r| \sin^2 \gamma}{4(\cos^2 \gamma + r^2 \sin^2 \gamma)^{\frac{1}{2}}} dr d\theta = \frac{t |u(\theta) \cdot v + t| |\tau|^2 |r| \sin^2 \gamma}{4} dr d\theta.$$

Se tiene (para  $\delta_1 < \frac{1+\cos \gamma_2}{2}$ ),

$$t + u(\theta) \cdot v \geq (1 + u(\theta) \cdot v) - 2\delta_1 \geq 1 + \cos \gamma_2 - 2\delta_1 > 0.$$

La condición  $|v + tu(\theta)| \geq \frac{1}{100}$  nos garantiza que  $|\lambda| \sim h(r, \gamma)$ . Tenemos que acotar  $|\frac{r-1}{r}|$ . Sabemos que

$$\left| \frac{r-1}{r} \right| = \left| 1 - \frac{1}{r} \right| \leq 1 + \frac{1}{|r|} \leq C'(\delta_1) (1 + 2^k \delta).$$

Finalmente, nótese que  $|\lambda| \sim h(r, \gamma) \geq \delta^{-1}$ . Se tiene

$$\begin{aligned} G_3^\delta(\tau) &\leq C 2^{-k} \int_{1-2\delta}^{1+2\delta} \int_{|\lambda| \geq C\delta^{-1}} \left( \sum_{j=1}^{N_2 2^k} \chi_{H_j^*(t)}(\lambda) \right) |\lambda|^{2\beta-3+2\varepsilon} |\hat{q}(\lambda)|^2 (1 + 2^k \delta) d\lambda dt \\ &\leq C \left[ 2^{-k} \delta \int_{|\lambda| \geq C\delta^{-1}} |\lambda|^{2\beta-3+2\varepsilon} |\hat{q}(\lambda)|^2 d\lambda + \delta^2 \int_{|\lambda| > 1} |\lambda|^{2\beta-3+2\varepsilon} |\hat{q}(\lambda)|^2 d\lambda \right] \\ &\leq C \delta^2 \left( 2^{-k} \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{q}(\lambda)|^2 |\lambda|^{2\beta-2+2\varepsilon} d\lambda + \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{q}(\lambda)|^2 |\lambda|^{2\beta-3+2\varepsilon} d\lambda \right). \end{aligned}$$

• Prueba de (iv). Sea  $\{e_1, e_2\}$  una referencia ortonormal del plano tal que  $\xi = |\xi|e_1$ . Escribimos  $\eta = |\xi|e_1 + se_2$ , con  $h(s) := |\eta| = (|\xi|^2 + s^2)^{\frac{1}{2}}$  y  $|s| \geq \frac{49}{100} 2^{-k} \delta^{-1}$ .

Hacemos los cambios para  $\xi', \tau'$  como más arriba. Considerando el recubrimiento de  $S^1$  del caso anterior, tenemos:

$$G_4^\delta(\xi) \leq \int_{|s| \geq C 2^{-k} \delta^{-1}} h(s)^{2\beta-3+2\varepsilon} \int_{S^1} \int_{1-2\delta}^{1+2\delta} t$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_{\Theta_k(t,v)} \left| \hat{q} \left( -\frac{h(s)}{2}(v + tu(\theta)) \right) \right|^2 d\theta dt d\sigma(v) ds \\
& \leq \sum_{j=1}^{N_2 2^k} \int_{B_j} \int_{1-2\delta}^{1+2\delta} t \int_{|s| \geq C 2^{-k} \delta^{-1}} \int_{\tilde{\Theta}_j(t)} h(s)^{2\beta-3+2\varepsilon} \\
& \quad \times \left| \hat{q} \left( -\frac{h(s)}{2}(v + tu(\theta)) \right) \right|^2 d\theta ds dt d\sigma(v),
\end{aligned}$$

donde  $\Theta_k(t, v)$ ,  $\tilde{\Theta}_j(t)$  se definieron en (2.2.84), (2.2.85). Para  $j, v, t$  fijos, aplicamos el cambio de variables  $(s, \theta) \rightarrow (\lambda_1, \lambda_2)$  dado por

$$\lambda = \eta - \xi' - \tau' = -\frac{h(s)}{2}(v + tu(\theta)),$$

con  $d\lambda_1 d\lambda_2 = C |s(t + u(\theta) \cdot v)| t ds d\theta$ . Por estar  $v \in B_j$  y  $\theta$  en  $\tilde{\Theta}_j(t)$ , ya sabemos que  $t + u(\theta) \cdot v$  está acotado inferiormente y que  $|\lambda| \sim h(s)$ . Todo esto nos permite escribir:

$$G_4^\delta(\xi) \leq C \sum_{j=1}^{N_2 2^k} 2^{-k} \int_{1-2\delta}^{1+2\delta} \int_{H_j^*(t)} |\hat{q}(\lambda)|^2 |\lambda|^{2\beta-3+2\varepsilon} 2^k \delta d\lambda dt \leq C \delta^2 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{3}{2}+\varepsilon, 2}}^2,$$

donde  $H_j^*(t)$  se define en (2.2.86).

Queda probado el lema 2.2.4. Esto termina la demostración del lema 2.2.2. □

### 2.2.5. Esbozo de la demostración del lema 2.2.3

La prueba del lema 2.2.3 se basa en la demostración del lema 2.2.2 con la consideración de que  $\delta$  es del orden de  $|\eta|^{-1}$ . Por consiguiente, hay que seguir las líneas de la prueba del lema 2.2.2 substituyendo las ocurrencias de  $\hat{q}$  que se aplican a  $\xi$ ,  $\eta - \tau$  y  $\tau - \xi$  por  $\hat{f}_1$ ,  $\hat{f}_2$  y  $\hat{f}_3$ , respectivamente, así como el dominio  $\Gamma_\delta(\eta)$  por  $\Gamma_\infty(\eta)$ , la función característica  $\chi_{(\delta^{-1}, \infty)}$  por  $\chi^*$  y el decaimiento  $|\eta|^{-3}$  por  $|\eta|^{-2}$ .

El lema 2.2.3 se aplica en el control del término  $Q_\infty''(q)$ . Sin embargo, debemos tener en cuenta que todos los casos de aplicación se caracterizan por que la función  $\hat{f}_1$  que se aplica a  $\xi$  es la transformada de Fourier del potencial  $q$  de soporte compacto, mientras que las funciones  $\hat{f}_2$ ,  $\hat{f}_3$  que se aplican a  $\eta - \tau$  y  $\tau - \xi$  pueden ser  $\hat{q}$  pero también  $M\hat{q}$  o  $M\nabla\hat{q}$ , donde  $M$  denota el operador maximal de Hardy-Littlewood.

Este hecho obliga a marcar una diferenciación en las líneas de demostración del lema 2.2.2 en aquellos puntos de la prueba donde se exija la compacidad del soporte de  $q$  cuando la ocurrencia de  $\hat{q}$  no se aplica a la variable  $\xi$ , ya que nuestras funciones  $f_2$ ,  $f_3$  no tienen por qué ser de soporte compacto.

Esta situación únicamente se da en el caso  $I_\infty^\delta(\eta)$  a la hora de probar la estimación (2.2.44b), donde se aplica la parte (1) del **lema B.1** a la ocurrencia de  $\hat{q}$  que tiene por

argumento  $\eta - \xi' - \tau'$  y que se corresponde con la función  $f_3$ , haciendo

$$|\hat{q}(\eta - \xi' - \tau')| \leq C M \hat{q}(\eta - 2\xi')$$

en el caso  $I_\infty^{1,\delta}(\eta)$  y

$$|\hat{q}(\eta - \xi' - \tau')| \leq C M \hat{q}(\eta - \tau')$$

en el caso  $I_\infty^{2,\delta}(\eta)$ .

A continuación exponemos una demostración alternativa para el control del término  $Q''_{I_\infty}(f_1, f_2, f_3)$  sin acotar ninguna de las funciones  $f_2, f_3$  por el operador maximal y sin exigir la compacidad de sus soportes, donde

$$\mathcal{F}(Q''_{I_\infty}(f_1, f_2, f_3))(\eta) := \chi^*(\eta) \frac{1}{|\eta|^2} \int \int_{I_\infty(\eta)} |\hat{f}_1(\xi) \hat{f}_2(\tau) \hat{f}_3(\eta - \tau - \xi)| d\sigma(\xi) d\tau,$$

y

$$I_\infty(\eta) := \{(\xi, \tau) \in \Gamma(\eta) \times \Gamma_\infty(\eta) : |\xi - \tau| \leq 1, |\eta - \xi - \tau| \geq |\eta|/100\}.$$

Vamos a demostrar la estimación

$$\|Q''_{I_\infty}(f_1, f_2, f_3)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\beta) \|f_2\|_{L^2} (\|f_1\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|f_3\|_{\dot{W}^{\beta-1,2}} + \|f_3\|_{L^2} \|f_1\|_{\dot{W}^{\beta-3/2,2}}). \quad (2.2.87)$$

Para ello, hacemos la división  $I_\infty(\eta) = I_\infty^1(\eta) \cup I_\infty^2(\eta)$ , donde

$$I_\infty^1(\eta) := \{(\xi, \tau) \in \Gamma(\eta) \times \Gamma_\infty(\eta) : |\xi - \tau| \leq 1, |\eta - \xi - \tau| \geq |\eta|/100, 2|\xi| \leq |\eta|\},$$

$$I_\infty^2(\eta) := \{(\xi, \tau) \in \Gamma(\eta) \times \Gamma_\infty(\eta) : |\xi - \tau| \leq 1, |\eta - \xi - \tau| \geq |\eta|/100, 2|\xi| \geq |\eta|\}.$$

Denotamos

$$\mathcal{F}(Q''_{I_\infty}(f_1, f_2, f_3))(\eta) := \chi^*(\eta) \frac{1}{|\eta|^2} \int \int_{I_\infty^1(\eta)} |\hat{f}_1(\xi) \hat{f}_2(\tau) \hat{f}_3(\eta - \xi - \tau)| d\sigma(\xi) d\tau,$$

con idéntica expresión para  $I_\infty^2(\eta)$ .

*Control de la región  $I_\infty^1(\eta)$ .*

Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz, para  $|\eta| \geq C_0$  se tiene

$$|\mathcal{F}(Q''_{I_\infty^1}(f_1, f_2, f_3))(\eta)|^2 \leq \frac{1}{|\eta|^4} \int \int_{I_\infty^1(\eta)} |\hat{f}_1(\xi) \hat{f}_3(\eta - \xi - \tau)|^2 d\sigma(\xi) d\tau \quad (2.2.88)$$

$$\times \int \int_{I_\infty^1(\eta)} |\hat{f}_2(\tau')|^2 d\sigma(\xi') d\tau', \quad (2.2.89)$$

y además gracias a la condición  $|\xi' - \tau'| \leq 1$  que se satisface si  $(\xi', \tau') \in I_\infty^1(\eta)$ , se cumple

$$\int \int_{I_\infty^1(\eta)} |\hat{f}_2(\tau')|^2 d\sigma(\xi') d\tau' \leq \int_{\Gamma_\infty(\eta)} |\hat{f}_2(\tau')|^2 \int_{\Gamma(\eta) \cap B(\tau', 1)} d\sigma(\xi') d\tau' \leq C \|f_2\|_{L^2}^2.$$

De este modo, podemos escribir

$$\begin{aligned} \|Q''_{I_\infty}(f_1, f_2, f_3)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}^2 &\leq C \|f_2\|_{L^2}^2 \int_{\{|\eta| \geq C_0\}} |\eta|^{2\beta-4} \int_{\Gamma(\eta) \cap B_{|\eta|/2}} |\hat{f}_1(\xi)|^2 \\ &\quad \times \int_{\Gamma_\infty(\eta) \cap B(\xi,1) \cap B(\eta-\xi, |\eta|/100)^c} |\hat{f}_3(\eta - \xi - \tau)|^2 d\tau d\sigma(\xi) d\eta \end{aligned} \quad (2.2.90)$$

$$\leq C \|f_2\|_{L^2}^2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\hat{f}_1(\xi)|^2}{|\xi|} H^*(\xi) d\xi, \quad (2.2.91)$$

donde

$$H^*(\xi) := \int_{\Lambda(\xi) \cap B_{2|\xi|}^c \cap B_{C_0}^c} |\eta|^{2\beta-3} \int_{\Gamma_\infty(\eta) \cap B(\xi,1) \cap B(\eta-\xi, |\eta|/100)^c} |\hat{f}_3(\eta - \xi - \tau)|^2 d\tau d\sigma(\eta).$$

La última desigualdad se deduce cambiando el orden de integración en las variables  $\xi$  y  $\eta$  aplicando el lema B.2.

Vamos a probar la siguiente

**Afirmación 2.2.1.** *Sea  $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Entonces*

$$H^*(\xi) \leq C \|f_3\|_{\dot{W}^{\beta-1,2}}.$$

**Demostración.** Sea  $\{e_1, e_2\}$  una referencia ortonormal del plano tal que  $\xi = |\xi|e_1$ . Parametrizamos  $\eta \in \Lambda(\xi)$  por  $s \in \mathbb{R}$ :  $\eta = |\xi|e_1 + se_2$  y denotamos  $h(s) := (|\xi|^2 + s^2)^{\frac{1}{2}}$ . Las condiciones  $|\eta| \geq 2|\xi|$  y  $|\eta| \geq C_0$  se expresan ahora como  $|s| \geq j(\xi)$ , donde

$$j(\xi) := \max \left\{ 3|\xi|^2, \sqrt{C_0^2 - |\xi|^2} \right\} \chi_{(0,C_0)}(|\xi|) + 3|\xi|^2 \chi_{(C_0,\infty)}(|\xi|).$$

Nos queda

$$H^*(\xi) = \int_{|s| \geq j(\xi)} h(s)^{2\beta-3} \int_{\Gamma_\infty(\xi+se_2) \cap B(\xi,1) \cap B(se_2, h(s)/100)^c} |\hat{f}_3(se_2 - \tau)|^2 d\tau ds. \quad (2.2.92)$$

Obsérvese que la condición original  $|\eta - \xi - \tau| \geq \frac{|\eta|}{100}$  garantiza que  $|\eta - \xi - \tau| \sim |\eta|$ . De hecho, por estar  $\eta - \xi \in \Gamma(\eta)$  y  $\tau \in \Gamma_\infty(\eta)$  también se cumple

$$|(\eta - \xi) - \tau| \leq |\eta| + 1 \leq |\eta| + \frac{|\eta|}{C_0} = \left(1 + \frac{1}{C_0}\right) |\eta|.$$

Esta propiedad en términos de  $s$  se traduce como  $\frac{h(s)}{100} \leq |se_2 - \tau| \leq \left(1 + \frac{1}{C_0}\right) h(s)$ .

Seguidamente, cambiamos la variable bidimensional  $\tau$  por las variables  $t, \theta$ :

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\eta}{2} + \frac{h(s)}{2} t (\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2) \\ &= \frac{1}{2} [ (|\xi| + h(s)t \cos \theta) e_1 + (s + h(s)t \sin \theta) e_2 ], \end{aligned} \quad (2.2.93)$$



donde  $|t - 1| \leq \frac{2}{h(s)} \leq \frac{2}{C_0}$  y  $\theta \in A(s, \xi)$  con la notación

$$A(s, t, \xi) := \{\theta \in [-\pi, \pi) : |\tau - \xi| \leq 1, \tau \in \Gamma_\infty(\xi + se_2), \\ h(s)/100 \leq |\tau - se_2| \leq (1 + 1/C_0)h(s)\},$$

donde  $\tau = \tau(\xi, s, t, \theta)$  viene dado por (2.2.93). Se cumple  $d\tau = \frac{th(s)^2}{4} dt d\theta$ . La expresión (2.2.92) está acotada por

$$\frac{1}{4} \int_{|s| \geq j(\xi)} h(s)^{2\beta-1} \int_{A(s, t, \xi)} \int_{1-\frac{2}{C_0}}^{1+\frac{2}{C_0}} t \quad (2.2.94)$$

$$\times |\hat{f}_3(-1/2 [(|\xi| + h(s)t \cos \theta)e_1 - (s - h(s)t \sin \theta)e_2])|^2 dt d\theta ds. \quad (2.2.95)$$

Para cada  $t$  fijo, tomamos el cambio de variables  $(s, \theta) \rightarrow (\lambda_1, \lambda_2) = \lambda$  que viene dado por  $\lambda = \eta - \xi - \tau = se_2 - \tau$ , esto es

$$\lambda_1 = -\frac{|\xi| + h(s)t \cos \theta}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{s - h(s)t \sin \theta}{2}.$$

El término Jacobiano viene dado por

$$ds d\theta = \frac{2}{|\lambda_2 + s(t^2 - 1)/2|} d\lambda.$$

Para acotarlo téngase en cuenta que  $|s| \leq h(s) \leq C|\lambda|$ , ya que  $|\lambda| \sim h(s)$ , así como las desigualdades

$$|t^2 - 1| = (t + 1)|t - 1| \leq 2\left(1 + \frac{1}{C_0}\right)\frac{2}{C_0} = 4\left(\frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_0^2}\right) < \frac{8}{C_0},$$

y por último que  $|\lambda| \sim |\lambda_2|$ . Este último hecho se debe a que las condiciones  $\tau \in \Gamma_\infty(\eta)$ ,  $|\tau - \xi| \leq 1$ ,  $|\xi| \leq \frac{|\eta|}{2}$  y  $|\eta| \geq C_0 > 10$  hacen que el ángulo  $\gamma$  que forman  $\eta - \xi$  y  $\eta - \xi - \tau$  esté controlado de forma que  $|\cos \gamma| \geq C > 0$ , para cierta constante universal  $C$ , como consecuencia de que con tales condiciones  $\tau$  está forzado a estar fuera de un cono no convexo de vértice  $\eta - \xi$  y eje de la dirección de  $\xi$ .

Por todo ello, se tiene

$$|\lambda_2 + s(t^2 - 1)/2| \geq |\lambda_2| - |s(t^2 - 1)|/2 \geq C|\lambda| - \frac{C'|\lambda|}{C_0}$$

para ciertas constantes  $C, C' > 0$ , donde elegimos  $C_0 > \frac{C'}{C}$ .

Concluimos entonces la prueba de la afirmación 2.2.1 con la siguiente acotación

$$H^*(\xi) \leq C \int_{1-\frac{2}{C_0}}^{1+\frac{2}{C_0}} t \int_{\mathbb{R}^2} |\lambda|^{2\beta-2} |\hat{f}_3(\lambda)|^2 d\lambda dt = C \|f_3\|_{\dot{W}^{\beta-1,2}}^2.$$

□

A partir de la expresión (2.2.91), por la afirmación 2.2.1 se obtiene

$$\|Q''_{I_\infty}(f_1, f_2, f_3)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C \|f_1\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|f_2\|_{L^2} \|f_3\|_{\dot{W}^{\beta-1,2}}. \quad (2.2.96)$$

Control de la región  $I_\infty^2(\eta)$ .

Aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwartz como en (2.2.88)-(2.2.89) y de nuevo aprovechamos la condición  $|\xi' - \tau'| \leq 1$  de  $I_\infty(\eta)$  en la estimación

$$\int \int_{I_\infty^1(\eta)} |\hat{f}_2(\tau')|^2 d\sigma(\xi') d\tau' \leq C \|f_2\|_{L^2}^2.$$

Nótese que para cada  $\eta$  se cumple

$$\begin{aligned} & \int \int_{I_\infty^2(\eta)} |\hat{f}_1(\xi) \hat{f}_3(\eta - \xi - \tau)|^2 d\sigma(\xi) d\tau \\ & \leq \int_{\Gamma(\eta) \cap B_{|\eta|/2}^c} |\hat{f}_1(\xi)|^2 d\sigma(\xi) \int_{\Gamma_\infty(\eta)} |\hat{f}_3(\eta - \xi - \tau)|^2 d\tau d\sigma(\xi) \\ & \leq \int_{\Gamma(\eta) \cap B_{|\eta|/2}^c} |\hat{f}_1(\xi)|^2 d\sigma(\xi) \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{f}_3(x)|^2 dx d\sigma(\xi) \\ & = C \|f_3\|_{L^2}^2 \int_{\Gamma(\eta) \cap B_{|\eta|/2}^c} |\hat{f}_1(\xi)|^2 d\sigma(\xi). \end{aligned}$$

Así, por todo lo dicho y cambiando el orden de integración en  $\xi$  y  $\eta$  por el lema B.2 y sabiendo que  $|\xi| \sim |\eta|$ , escribimos

$$\begin{aligned} \|Q''_{I_\infty}(f_1, f_2, f_3)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}^2 & \leq C \|f_2\|_{L^2}^2 \|f_3\|_{L^2}^2 \int_{\{|\eta| \geq C_0\}} |\eta|^{2\beta-4} \int_{\Gamma(\eta) \cap B_{|\eta|/2}^c} |\hat{f}_1(\xi)|^2 d\sigma(\xi) d\eta \\ & \leq C \|f_2\|_{L^2}^2 \|f_3\|_{L^2}^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{f}_1(\xi)|^2 d\sigma(\xi) \int_{\Lambda(\xi) \cap B_{2|\xi|}} |\eta|^{2\beta-4} d\sigma(\eta) d\xi \\ & \leq C \|f_2\|_{L^2}^2 \|f_3\|_{L^2}^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{f}_1(\xi)|^2 |\xi|^{2\beta-3} d\xi, \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad debe tenerse presente que la medida  $\sigma(\Lambda(\xi) \cap B_{2|\xi|})$  es del orden de  $|\xi|$  gracias a que las cantidades  $|\xi|$  y  $|\eta|$  son comparables. Hemos probado que

$$\|Q''_{I_\infty}(f_1, f_2, f_3)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C \|f_2\|_{L^2} \|f_3\|_{L^2} \|f_1\|_{\dot{W}^{\beta-3/2}}. \quad (2.2.97)$$

A partir de las expresiones (2.2.96) y (2.2.97) obtenemos (2.2.87).

### 2.2.6. Ideas clave para controlar el término valor principal “puro”

En esta subsección esperamos convencer al lector de que se puede controlar la norma en el espacio  $\dot{W}^{\beta,2}$  del término de valor principal dado por la expresión (2.2.1). Para ello, nos limitaremos a comentar las cuestiones técnicas más relevantes evitando tediosas repeticiones de argumentos ya presentados anteriormente.

Al descomponer la integral (2.2.1) en función de la partición de  $\mathbb{R}^2$  presentada en (A.0.3), para cierto  $j_0 \in \mathbb{Z}^+$ , debemos tratar un término de la forma

$$\int_{\Gamma_j(\eta)} \int_{\Gamma_k(\eta)} \frac{\hat{q}(\xi)\hat{q}(\eta-\tau)\hat{q}(\tau-\xi)}{[\xi \cdot (\eta-\xi)][\tau \cdot (\eta-\tau)]} d\xi d\tau, \quad (2.2.98)$$

para  $j_0 \leq j, k \leq N$ . La clave del asunto radica en el resultado análogo al lema 2.2.2 adaptado para acotar los términos de las coronas (2.2.98) y cuya demostración se basa en las técnicas utilizadas para probar dicho lema:

**Lema 2.2.5.** *Sean  $q, \alpha, \beta$  como en el teorema 1.5.3 y  $\delta_1, \delta_2 > 0$ . Usando la notación en (2.2.42), escribimos*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(Q_{\delta_1, \delta_2}(q))(\eta) &:= \int_{\Gamma_{\delta_1}(\eta)} \int_{\Gamma_{\delta_2}(\eta)} \frac{|\hat{q}(\xi)\hat{q}(\eta-\tau)\hat{q}(\tau-\xi)|}{|\eta|^4} d\xi d\tau \\ &\times \chi_{(\delta_1^{-1}, +\infty)}(|\eta|) \chi_{(\delta_2^{-1}, +\infty)}(|\eta|). \end{aligned}$$

Entonces existen  $\tilde{\delta} > 0$ ,  $\gamma > 1$  y una constante  $C(spt q, \alpha, \beta, \tilde{\delta})$  que depende de  $spt q, \alpha, \beta$  y  $\tilde{\delta}$  tales que  $0 < C(spt q, \alpha, \beta, \tilde{\delta}) < +\infty$ , y

$$\|Q_{\delta_1, \delta_2}(q)\|_{\dot{W}^{\beta, 2}} \leq C(spt q, \alpha, \beta, \tilde{\delta}) \delta_1^\gamma \delta_2^\gamma \|q\|_{W^{\alpha, 2}}^3,$$

para  $\delta_1, \delta_2$  cualesquiera que cumplan  $0 < \delta_1, \delta_2 \leq \tilde{\delta}$ .

En la partición de  $\mathbb{R}^2$  citada se elige  $j_0$  como el menor entero tal que  $2^{-j_0} \leq \tilde{\delta}$ .

La estimación de la parte singular cercana a la variedad  $\Gamma(\eta)$ , esto es

$$\widehat{Q_\infty(q)}(\eta) := v.p. \int_{\Gamma_\infty(\eta)} \int_{\Gamma_\infty(\eta)} \frac{\hat{q}(\xi)\hat{q}(\eta-\xi)\hat{q}(\tau-\xi)}{[\xi \cdot (\eta-\xi)][\tau \cdot (\eta-\tau)]} d\xi d\tau,$$

donde  $\Gamma_\infty(\eta)$  se define en (A.0.4), se realiza compensando signos. Manteniendo las notaciones (2.1.24)-(2.1.25) (quitando la condición  $|\xi| > |\eta-\xi|$ ) tomamos límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  en la expresión

$$\left( \int_{\Gamma_\varepsilon^+(\eta)} + \int_{\Gamma_\varepsilon^-(\eta)} \right) \left( \int_{\Gamma_\varepsilon^+(\eta)} + \int_{\Gamma_\varepsilon^-(\eta)} \right) \frac{\hat{q}(\xi)\hat{q}(\eta-\tau)\hat{q}(\tau-\xi)}{[\xi \cdot (\eta-\xi)][\tau \cdot (\eta-\tau)]} d\xi d\tau.$$

Las cantidades  $\xi \cdot (\eta-\xi)$  y  $\tau \cdot (\eta-\tau)$  tienen signos diferentes en  $\Gamma_\varepsilon^-(\eta)$  y  $\Gamma_\varepsilon^+(\eta)$ . En los casos de alternancia de signos, como por ejemplo

$$\int_{\Gamma_\varepsilon^+(\eta)} \int_{\Gamma_\varepsilon^-(\eta)} \frac{\hat{q}(\xi)\hat{q}(\eta-\tau)\hat{q}(\tau-\xi)}{[\xi \cdot (\eta-\xi)][\tau \cdot (\eta-\tau)]} d\xi d\tau,$$

se deben sumar y restar los términos adecuados para cancelar las singularidades utilizando la siguiente estimación para las diferencias segundas, válida para una función de soporte compacto  $q$  y consecuencia de la estimación de Calderón (2.1.33):

$$|\hat{q}(z) - \hat{q}(z-x+y) + \hat{q}(y) - \hat{q}(x)| \leq C|z-x||x-y| (M^2(|D^2\hat{q}|)(x) + M^2(|D^2\hat{q}|)(y))$$

$$+ M^2(|D^2\hat{q}|)(z) + M^2(|D^2\hat{q}|)(z - x + y) \, .$$

Cabe esperar la misma ganancia de derivada del término de valor principal (2.2.1) respecto del potencial que la obtenida para  $Q'(q)$  y  $Q''(q)$  en las subsecciones 2.2.1, 2.2.2. Este hecho, junto a las estimaciones (2.2.19), (2.2.35), nos conduce a la expresión (1.5.3) y pone fin a la demostración de teorema 1.5.3.

## Capítulo 3

# Dispersión doble, triple y cuádruple en 3d

En este capítulo se estudian en profundidad los términos  $Q_2(q)$ ,  $Q_3(q)$  y  $Q_4(q)$  en dimensión 3. Estos resultados permiten probar la ganancia de media derivada de  $q - q_B$  respecto del potencial  $q$ , módulo una función  $C^\infty(\mathbb{R}^3)$  en la escala de Sobolev Hilbertiana en dimensión 3, deduciendo el teorema 1.5.2.

En las secciones 3.1, 3.2, 3.3 presentamos las demostraciones de las proposiciones 1.5.3, 1.5.4 y del segundo resultado original de esta memoria, esto es, el teorema 1.5.4, respectivamente. Para clarificar nuestra exposición hemos reservado la sección 3.4 para los enunciados y las demostraciones de las herramientas clave para controlar los términos  $Q_3(q)$  y  $Q_4(q)$ .

### 3.1. Ganancia de regularidad de $Q_2(q)$ respecto de $q$

En esta sección vamos a exponer la demostración de [RV] de la ganancia de media derivada del término cuadrático, módulo la clase  $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ , respecto del potencial que se establece en la proposición 1.5.3.

Como ocurría en el caso bidimensional debemos acotar el término esférico que aparece en (2.1.1), así como la parte de valor principal.

En este caso vuelve a darse la ganancia de  $\frac{1}{2}^-$  derivada por parte del término esférico respecto de  $q$  sin considerar funciones de la clase  $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ .

El resultado clave de la estimación del término valor principal es el lema 3.1.2 de la subsección 3.1.2.

### 3.1.1. Estimación del término esférico $S(q)$

Para probar la proposición 1.5.3 empezamos por estimar el término esférico de la expresión para  $\widehat{Q_2(q)}(\eta)$  en (2.1.1). Antes una notación.

**Notación.** Sea  $\eta \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . Escribimos  $\widehat{S(q)}(\eta) := \frac{1}{|\eta|} \int_{\Gamma(\eta)} \hat{q}(\eta - \xi) \hat{q}(\xi) d\sigma(\xi)$ .

Vamos a probar el siguiente

**Lema 3.1.1.** *Sea  $q$  como en la proposición 1.5.3. Entonces, para todo  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que  $\beta < \alpha + \frac{1}{2}$ ,*

$$\|S(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C \|q\|_{L^2} \|q\|_{\dot{W}^{\alpha,2}}. \quad (3.1.1)$$

#### Demostración del lema 3.1.1

Por simetría nos podemos reducir al dominio de integración

$$\Gamma(\eta) \cap \{\xi \in \mathbb{R}^3 : |\xi| \geq |\eta - \xi|\}.$$

Por cuestiones técnicas dividimos este conjunto en 8 regiones  $\Gamma^j(\eta)$  con la siguiente propiedad: si  $\xi, \xi' \in \Gamma^j(\eta)$ , entonces el ángulo entre los vectores  $\eta - \xi$  y  $\eta - \xi'$  es menor que  $\frac{\pi}{4}$ . Usaremos esta propiedad para afirmar que si  $\xi, \xi' \in \Gamma^j(\eta)$ , se tiene

$$|(\eta - \xi) \cdot (\eta - \xi')| \sim |\eta - \xi| |\eta - \xi'|.$$

Esta descomposición se hace de la siguiente manera. Consideramos el plano  $\{\eta\}^\perp$  ortogonal a  $\eta$  que pasa por el origen, establecemos una referencia y tomamos coordenadas polares  $r$ ,  $\theta$  en este plano. Lo dividimos en ocho sectores angulares,  $\Delta^j$ ,  $j = 1, 2, \dots, 8$ , de manera que se cumple  $\frac{(j-1)\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{j\pi}{4}$  en el sector  $\Delta^j$ . Definimos

$$\Gamma^j(\eta) := \Gamma(\eta) \cap \{\xi \in \mathbb{R}^3 : P(\xi - \eta) \in \Delta^j, |\xi| \geq |\eta - \xi|\},$$

donde  $P$  es la proyección ortogonal sobre el plano  $\{\eta\}^\perp$ . Fijemos  $j \in \{1, \dots, 8\}$ . Sea

$$\widehat{Q^{(j)}(q)}(\eta) := \frac{1}{|\eta|} \int_{\Gamma^j(\eta)} \hat{q}(\eta - \xi) \hat{q}(\xi) d\sigma(\xi).$$

Haremos una descomposición más de  $\Gamma^j(\eta)$ . Para  $k = 1, \dots, \lfloor \log_2 |\eta| \rfloor$ , definimos el anillo

$$\Gamma_k^j(\eta) := \{\xi \in \Gamma^j(\eta) : |\xi - \eta| \sim 2^{-k} |\eta|\},$$

y

$$\Gamma_\infty^j(\eta) := \{\xi \in \Gamma^j(\eta) : |\xi - \eta| \leq 1\},$$

de manera que  $\Gamma^j(\eta) \subset \bigcup_{k=1}^{\lfloor \log_2 |\eta| \rfloor} \Gamma_k^j(\eta) \cup \Gamma_\infty^j(\eta)$ . Para  $k \geq 1$ , denotamos

$$\widehat{Q_k^j(q)}(\eta) := \chi_{\{|\eta| \geq 2^k\}}(\eta) \frac{1}{|\eta|} \int_{\Gamma_k^j(\eta)} \hat{q}(\eta - \xi) \hat{q}(\xi) d\sigma(\xi),$$

y  $\widehat{Q_\infty^j(q)(\eta)}$  de manera obvia para el dominio  $\Gamma_\infty^j(\eta)$  sin multiplicar por la función característica. Empecemos con  $Q_k^j(q)$ . Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwartz,

$$\left| \widehat{Q_k^j(q)(\eta)} \right|^2 \leq \chi_{\{|\eta| \geq 2^k\}}(\eta) \frac{1}{|\eta|^2} \int_{\Gamma_k^j(\eta)} |\hat{q}(\eta - \xi')|^2 d\sigma(\xi') \int_{\Gamma_k^j(\eta)} |\hat{q}(\xi)|^2 d\sigma(\xi).$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \|Q_k^j(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}^2 &= \int_{\mathbb{R}^3} \left| \widehat{Q_k^j(q)(\eta)} \right|^2 |\eta|^{2\beta} d\eta \\ &\leq 2^{-2\epsilon k} \int_{\{|\eta| \geq 2^k\}} |\eta|^{2\beta-2+2\epsilon} \int_{\Gamma_k^j(\eta)} |\hat{q}(\eta - \xi')|^2 d\sigma(\xi') \int_{\Gamma_k^j(\eta)} |\hat{q}(\xi)|^2 d\sigma(\xi) d\eta. \end{aligned}$$

Para  $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , denotamos

$$\Lambda_k^j(\xi) := \{\eta \in \mathbb{R}^3 : \xi \in \Gamma_k^j(\eta)\}.$$

Por el lema B.2, podemos cambiar el orden de integración para obtener

$$\begin{aligned} \|Q_k^j(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}^2 &\leq 2^{-2\epsilon k} \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{q}(\xi)|^2 \int_{\Lambda_k^j(\xi)} \int_{\Gamma_k^j(\eta)} |\hat{q}(\eta - \xi')|^2 d\sigma(\xi') |\eta|^{2\beta-1+2\epsilon} d\sigma(\eta) \frac{d\xi}{|\xi|} \\ &\leq C 2^{-2\epsilon k} \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{q}(\xi)|^2 \int_{\Lambda_k^j(\xi)} \int_{\Gamma_k^j(\eta)} |\hat{q}(\eta - \xi')|^2 d\sigma(\xi') |\eta|^{-1} d\sigma(\eta) |\xi|^{2\beta-1+2\epsilon} d\xi, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se desprende de que si  $\xi \in \Gamma_k^j(\eta)$  se cumple  $|\eta| \sim |\xi|$ , como consecuencia de la condición  $|\xi| \geq |\xi - \eta|$ . En virtud de la siguiente afirmación y haciendo  $\epsilon = \alpha + \frac{1}{2} - \beta > 0$ , llegamos a

$$\|Q_k^j(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C 2^{-\epsilon k} \|q\|_{L^2} \|q\|_{\dot{W}^{\alpha,2}}. \quad (3.1.2)$$

**Afirmación 3.1.1.** Sean  $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ,  $k \geq 1$ . Denotamos

$$\mathcal{F}_k(\xi) := \int_{\Lambda_k(\xi)} \int_{\Gamma_k(\eta)} |\hat{q}(\eta - \xi')|^2 d\sigma(\xi') |\eta|^{-1} d\sigma(\eta).$$

Entonces

$$\mathcal{F}_k(\xi) \leq C \|q\|_{L^2}^2.$$

**Demostración.** Para  $\eta \in \Lambda_k(\xi)$ , podemos escribir  $\eta = \xi + ru$ , para algún  $r > 0$ ,  $u \perp \xi$ ,  $|u| = 1$ . Denotamos  $h(r) := |\eta| = (|\xi|^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}$ . Se cumple  $d\sigma(\eta) = r dr d\sigma(u)$ , donde  $d\sigma(u)$  es la medida natural sobre la circunferencia unitaria  $S^1$  en el plano  $\{\xi\}^\perp$ , y  $r \sim 2^{-k} |\xi|$ . Para  $u \in S^1$  fijo, tomamos una referencia  $\{e_1, e_2, e_3\}$  en  $\mathbb{R}^3$  tal que  $u = e_3$ . Entonces  $\xi = (\xi_1, \xi_2, 0)$  y  $\eta = (\xi_1, \xi_2, r)$ . Escribimos para  $\xi' \in \Gamma_k(\eta) = \Gamma_k(\eta(r, u))$  y  $u \in S^1$  fijo,

$$\xi' = \frac{\eta(r)}{2} + \frac{h(r)}{2} v, \quad v \in S^2,$$

con  $d\sigma(\xi') = |\eta|^2 d\sigma(v)$ . Tomamos coordenadas esféricas en  $S^2$ .

$$v = (\sin\phi \cos\theta, \sin\phi \sin\theta, \cos\phi), \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Para  $r, u$  fijos, sea  $A(r, u) := \{(\phi, \theta) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi) : \xi'(r, u, \phi, \theta) \in \Gamma_k(\eta(r))\}$ . Entonces  $d\sigma(v) = \sin\phi d\phi d\theta$ . Obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k(\xi) &\leq \int_{S^1} \int_{2^{-k-1}|\xi|}^{2^{-k+1}|\xi|} \int \int_{A(r, u)} rh(r) \sin\phi \\ &\quad \times \left| \hat{q} \left( \frac{1}{2} (\xi_1 - h(r) \cos\theta \sin\phi, \xi_2 - h(r) \sin\theta \sin\phi, r - h(r) \cos\phi) \right) \right|^2 d\phi d\theta dr d\sigma(u). \end{aligned}$$

Para  $u$  fijo, hacemos el cambio de variables  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \leftrightarrow (r, \phi, \theta)$ , dado por

$$\lambda = \eta - \xi' = \frac{1}{2} (\xi_1 - h(r) \cos\theta \sin\phi, \xi_2 - h(r) \sin\theta \sin\phi, r - h(r) \cos\phi).$$

Se tiene  $d\lambda = 2^{-3} h(r)(\eta - \xi') \cdot u \sin\phi dr d\phi d\theta$ . Usando que  $\xi, \xi' \in \Gamma_k(\eta)$  garantizan que  $(\eta - \xi') \cdot u \sim |\lambda| \sim r$ , se deduce

$$\mathcal{F}_k(\xi) \leq \int_{S^1} \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{q}(\lambda)|^2 d\lambda d\sigma(u) = C \|q\|_{L^2}^2.$$

□

Vamos con el término  $Q_\infty^j(q)$ . Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz, el lema B.1 y por ser la medida de  $\Gamma_\infty^j(\eta)$  una constante independiente de  $|\eta|$ , se cumple

$$|\widehat{Q_\infty^j(q)}(\eta)| \leq \|\hat{q}\|_{L^\infty} \int_{\Gamma_\infty^j(\eta)} \frac{|\hat{q}(\xi)|}{|\eta|} d\sigma(\xi) \leq C \|q\|_{L^2} \left( \int_{\Gamma_\infty^j(\eta)} \frac{|\hat{q}(\xi)|^2}{|\eta|^2} d\sigma(\xi) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Tenemos

$$\|Q_\infty^j(q)\|_{W^{\beta,2}}^2 \leq C \|q\|_{L^2}^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\eta|^{2\beta-2} \int_{\Gamma_\infty^j(\eta)} |\hat{q}(\xi)|^2 d\sigma(\xi) d\eta.$$

Para  $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , denotamos

$$\Lambda_\infty^j(\xi) := \{\eta \in \mathbb{R}^3 : \xi \in \Gamma_\infty^j(\eta)\}.$$

Por el lema B.2, podemos cambiar el orden de integración para obtener

$$\begin{aligned} \|Q_\infty^j(q)\|_{W^{\beta,2}}^2 &\leq C \|q\|_{L^2}^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{q}(\xi)|^2 \int_{\Lambda_\infty^j(\xi)} |\eta|^{2\beta-1} d\sigma(\eta) \frac{d\xi}{|\xi|} \\ &\leq C \|q\|_{L^2}^2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\Lambda_\infty^j(\xi)} |\hat{q}(\xi)|^2 |\xi|^{2\beta-2} d\sigma(\eta) d\xi, \end{aligned}$$



donde la última desigualdad se desprende de que si  $\xi \in \Gamma_\infty^j(\eta)$  se cumple  $|\eta| \sim |\xi|$ , como consecuencia de la condición  $|\xi| \geq |\xi - \eta|$ . Puesto que  $\Lambda_\infty^j(\xi) \subset B(\xi, 1)$ , podemos escribir

$$\|Q_\infty^j(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C\|q\|_{L^2}\|q\|_{\dot{W}^{\beta-1,2}}. \quad (3.1.3)$$

Para todo  $j \in \{1, \dots, 8\}$ , por (3.1.2) y (3.1.3), se tiene

$$\|Q^{(j)}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \|Q_k^j(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} + \|Q_\infty^j(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\alpha, \beta, q) \|q\|_{L^2} \|q\|_{\dot{W}^{\alpha,2}},$$

para todo  $\beta < \alpha + \frac{1}{2}$ . De donde se deduce (3.1.1). □

### 3.1.2. Estimación del término valor principal

Por el mismo argumento ya usado en el caso bidimensional, el ingrediente principal para estimar la parte de valor principal de  $\widehat{Q_2(q)}(\eta)$  es el siguiente

**Lema 3.1.2.** *Sean  $\alpha, q$  como en la proposición 1.5.3. Para  $0 < \delta < 1$ , escribimos*

$$\widehat{Q_\delta(q)}(\eta) := \chi_{(\delta^{-1}, +\infty)}(|\eta|) \int_{\Gamma_\delta^*(\eta)} \frac{\hat{q}(\xi)\hat{q}(\eta - \xi)}{|\eta|^2} d\xi,$$

donde  $\Gamma_\delta^*(\eta) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^3 : \left| |\xi - \frac{\eta}{2}| - \frac{|\eta|}{2} \right| < \delta|\eta|, |\xi| \geq |\eta - \xi| \right\}$ . Entonces

$$\|Q_\delta(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C\delta^\gamma \|q\|_{L^2} \|q\|_{\dot{W}^{\alpha,2}},$$

para cierto  $\gamma = \gamma(\alpha) > 1$  y para todo  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que  $\beta < \alpha + \frac{1}{2}$ .

**Demostración.** Se trata de adaptar la prueba del lema 3.1.1 al caso en que engrosamos la esfera  $\Gamma(\eta)$  una distancia radial de  $\delta|\eta|$ . Para  $2^{-k} \geq \delta$  y  $j = 1, \dots, 8$ , consideramos un  $\delta|\eta|$ -entorno de  $\Gamma_k^j(\eta)$  y le quitamos la bola  $B(\eta, 100\delta|\eta|)$ . Al conjunto resultante lo denotamos por  $\Gamma_{\delta,k}^j(\eta)$ . También definimos para  $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ,

$$\Lambda_{\delta,k}^j(\xi) := \left\{ \eta : \xi \in \Gamma_{\delta,k}^j(\eta) \right\}.$$

A continuación se sigue el esquema de la prueba del lema 3.1.1. Nos limitamos a indicar las modificaciones necesarias para estimar el término

$$\widehat{Q_{\delta,k}^j(q)}(\eta) := \chi_{(\delta^{-1}, +\infty)}(|\eta|) \int_{\Gamma_{\delta,k}^j(\eta)} \frac{\hat{q}(\xi)\hat{q}(\eta - \xi)}{|\eta|^2} d\xi.$$

Como antes, por la desigualdad de Cauchy-Schwartz, se tiene

$$\left| \widehat{Q_{\delta,k}^j(q)}(\eta) \right|^2 \leq \frac{1}{|\eta|^4} \int_{\Gamma_{\delta,k}^j(\eta)} |\hat{q}(\eta - \xi')|^2 d\xi' \int_{\Gamma_{\delta,k}^j(\eta)} |\hat{q}(\xi)|^2 d\xi.$$

Por el teorema de Fubini y la propiedad  $|\xi| \sim |\eta|$ ,

$$\|Q_{\delta,k}^j(q)\|_{W^{\beta,2}}^2 \leq C \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{q}(\xi)|^2 \int_{\Lambda_{\delta,k}^j(\xi)} \int_{\Gamma_{\delta,k}^j(\eta)} |\hat{q}(\eta - \xi')|^2 d\xi' d\eta |\xi|^{2\beta-4} d\xi.$$

Para probar el resultado análogo a la afirmación 3.1.1, para  $\xi$  fijo, todo  $\eta \in \Lambda_{\delta,k}^j(\xi)$  puede escribirse como  $\eta = (1+t)\xi + ru$ , para algún  $t \sim \delta$ ,  $r > 0$ ,  $u \in \{\xi\}^\perp$ ,  $|u| = 1$ . Entonces  $d\eta = r|\xi| dt dr d\sigma(u)$ . Tomamos coordenadas esféricas en  $\Gamma_{\delta,k}^j(\eta)$

$$\xi' = \frac{\eta}{2} + (1+s)\frac{|\eta|}{2}(\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi),$$

con  $s \sim \delta$  y  $u = e_3$ . Entonces  $d\xi' = |\eta| \sin \phi ds d\phi d\theta$ . Para  $u, t, s$  fijos aplicamos el mismo cambio de variables que en la afirmación 3.1.1. Sólo queda usar algunos argumentos del final de la prueba del lema 2.1.2.

□

## 3.2. Ganancia de regularidad de $Q_3(q)$ respecto de $q$

En esta sección vamos a probar en detalle la ganancia de media derivada del término cúbico, módulo la clase  $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ , respecto del potencial que se establece en la proposición 1.5.4

### 3.2.1. Estimación del término esférico

Empezamos por estimar el término esférico (2.2.3) de la expresión para  $\widehat{Q_3(q)}(\eta)$ .

En el caso tridimensional mantendremos la notación para  $Q'(q)$  que señalábamos en (2.2.4).

**Lema 3.2.1.** *Sea  $q$  como en la proposición 1.5.4. Entonces, para todos  $\beta \geq 0$ ,  $\varepsilon > 0$ , existe una constante  $C(\varepsilon, \beta, spt q) > 0$  que sólo depende de  $\varepsilon$ ,  $\beta$  y el  $spt q$  tal que*

$$\|Q'(q)\|_{W^{\beta,2}} \tag{3.2.1}$$

$$\leq C(\varepsilon, \beta, spt q) \|q\|_{W^{\beta-\frac{1}{2}+\varepsilon,2}} \left[ \|q\|_{L^2}^2 + \|q\|_{W^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{\dot{W}^{-\varepsilon,2}} + \|q\|_{L^2} \|q\|_{W^{-\frac{1}{2}-\varepsilon,2}} \right]. \tag{3.2.2}$$

### Demostración del lema 3.2.1

Una diferencia importante de este caso respecto del término cuadrático es la ausencia de simetría entre  $|\xi| \geq |\eta - \xi|$  y  $|\xi| \leq |\eta - \xi|$ . Descomponemos el conjunto  $\Gamma(\eta) \times \Gamma(\eta)$  en dos regiones

$$I(\eta) := \left\{ (\xi, \tau) \in \Gamma(\eta) \times \Gamma(\eta) : |\xi - \tau| \geq \frac{|\eta|}{100} \right\}$$

y

$$II(\eta) := \left\{ (\xi, \tau) \in \Gamma(\eta) \times \Gamma(\eta) : |\xi - \tau| < \frac{|\eta|}{100} \right\}.$$

Escribimos

$$\widehat{Q'_I(q)}(\eta) := \frac{1}{|\eta|^2} \int \int_{I(\eta)} \hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau) \hat{q}(\tau - \xi) d\sigma(\tau) d\sigma(\xi),$$

y la expresión análoga para  $Q'_{II}(q)$ . El lema 3.2.1 se desprende de las siguientes afirmaciones

$$\|Q'_I(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\beta, \text{spt } q) \|q\|_{L^2}^2 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2},2}}, \quad (3.2.3)$$

$$\|Q'_{II}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\varepsilon, \beta) \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2}+\varepsilon,2}} \left[ \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{\dot{W}^{-\varepsilon,2}} + \|q\|_{L^2} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2}-\varepsilon,2}} \right], \quad (3.2.4)$$

donde  $\varepsilon > 0$ .

### Demostración de la afirmación (3.2.3)

Si hacemos el cambio de variables  $\tau = \eta - \tau'$  en la integral

$$\int \int_{I(\eta)} \hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau') \hat{q}(\tau' - \xi) d\sigma(\xi) d\sigma(\tau')$$

se obtiene

$$\widehat{Q'_I(q)}(\eta) = \frac{1}{|\eta|^2} \int \int_{\left\{|\xi - (\eta - \tau)| \geq \frac{|\eta|}{100}\right\} \cap \Gamma(\eta) \times \Gamma(\eta)} \hat{q}(\xi) \hat{q}(\tau) \hat{q}(\eta - \tau - \xi) d\sigma(\xi) d\sigma(\tau).$$

Consideremos la siguiente descomposición,

$$\Gamma(\eta) \times \Gamma(\eta) \cap \left\{|\eta - \xi - \tau| \geq \frac{|\eta|}{100}\right\} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left( I_k(\eta) \cup \tilde{I}_k(\eta) \right),$$

donde

$$I_k(\eta) := \left\{ (\xi, \tau) \in \Gamma(\eta) \times \Gamma(\eta) : |\xi - \tau| \sim 2^{-k} |\eta|, |\tau| \geq |\xi|, |\eta - \xi - \tau| \geq \frac{|\eta|}{100} \right\},$$

$$\tilde{I}_k(\eta) := \left\{ (\xi, \tau) \in \Gamma(\eta) \times \Gamma(\eta) : |\xi - \tau| \sim 2^{-k} |\eta|, |\tau| \leq |\xi|, |\eta - \xi - \tau| \geq \frac{|\eta|}{100} \right\}.$$

De acuerdo con esta partición, también definimos para  $k \geq 1$ ,

$$\widehat{Q'_{I_k}(q)}(\eta) := \frac{1}{|\eta|^2} \int \int_{I_k(\eta)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\tau) \hat{q}(\eta - \xi - \tau)| d\sigma(\xi) d\sigma(\tau),$$

y la expresión correspondiente para  $\widehat{Q'_{\tilde{I}_k}(q)}(\eta)$ . Las variables  $\xi$  y  $\tau$  juegan papeles simétricos, de manera que  $Q'_{\tilde{I}_k}(q) = Q'_{I_k}(q)$ , puesto que

$$\begin{aligned} & \int \int_{\tilde{I}_k(\eta)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\tau) \hat{q}(\eta - \xi - \tau)| d\sigma(\xi) d\sigma(\tau) \\ &= \int \int_{\tilde{I}_k(\eta)} |\hat{q}(\tau) \hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau - \xi)| d\sigma(\tau) d\sigma(\xi) \end{aligned}$$

$$= \int \int_{I_k(\eta)} |\hat{q}(\tau) \hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau - \xi)| d\sigma(\xi) d\sigma(\tau).$$

Luego, podemos escribir

$$\left| \widehat{Q'_{I_k}(q)}(\eta) \right| \leq 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \widehat{Q'_{I_k}(q)}(\eta).$$

Vayamos con el término  $Q'_{I_k}(q)$ , para un  $k \geq 1$  fijo. Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned} \widehat{Q'_{I_k}(q)}(\eta) &\leq \frac{1}{|\eta|^2} \left( \int \int_{I_k(\eta)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\tau)|^2 d\sigma(\xi) d\sigma(\tau) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left( \int \int_{I_k(\eta)} |\hat{q}(\eta - \xi' - \tau')|^2 d\sigma(\xi') d\sigma(\tau') \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Sea  $\Gamma_1(\eta)$  el 1-entorno de  $\Gamma(\eta)$ , esto es

$$\Gamma_1(\eta) := \left\{ \xi \in \mathbb{R}^3 : \left| \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right| - \frac{|\eta|}{2} \right| \leq 1 \right\}. \quad (3.2.5)$$

De manera similar a como procedimos en (2.2.14) en 2d, en virtud de la parte (1) del lema B.1, se cumple

$$\int_{\Gamma(\eta)} |\hat{q}(\xi)|^2 d\sigma(\xi) \leq C \int_{\Gamma_1(\eta)} |M\hat{q}(\xi)|^2 d\xi \leq C \|M\hat{q}\|_{L^2}^2 \leq C \|q\|_{L^2}^2. \quad (3.2.6)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \widehat{Q'_{I_k}(q)}(\eta) &\leq C \|q\|_{L^2} \frac{1}{|\eta|^2} \left( \int_{\{\tau \in \Gamma(\eta) : |\tau| \geq 2^{-k-2}|\eta|\}} |\hat{q}(\tau)|^2 d\sigma(\tau) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left( \int \int_{I_k(\eta)} |\hat{q}(\eta - \xi' - \tau')|^2 d\sigma(\xi') d\sigma(\tau') \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Nótese que si  $(\xi, \tau) \in I_k(\eta)$ , se tiene

$$|\tau| \geq |\xi - \tau| - |\xi| \geq 2^{-k-1}|\eta| - |\tau| \quad \Rightarrow \quad |\tau| \geq 2^{-k-2}|\eta|.$$

De este modo, cambiando el orden de integración en  $\tau$  y  $\eta$ , por el lema B.2,

$$\begin{aligned} \|Q'_{I_k}(q)\|_{W^{3,2}}^2 &\leq C \|q\|_{L^2}^2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\hat{q}(\tau)|^2}{|\tau|} \int_{\{\eta \in \Lambda(\tau) : |\tau| \geq 2^{-k-2}|\eta|\}} |\eta|^{2\beta-3} \\ &\quad \times \int \int_{I_k(\eta)} |\hat{q}(\eta - \xi' - \tau')|^2 d\sigma(\xi') d\sigma(\tau') d\sigma(\eta) d\tau \\ &\leq C 2^k \|q\|_{L^2}^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{q}(\tau)|^2 \int_{\Lambda(\tau)} |\eta|^{2\beta-4} \\ &\quad \times \int \int_{I_k(\eta)} |\hat{q}(\eta - \xi' - \tau')|^2 d\sigma(\xi') d\sigma(\tau') d\sigma(\eta) d\tau. \end{aligned}$$

Usando la siguiente afirmación en el caso  $\beta_0 = 2\beta - 4$  se obtiene

$$\|Q'_{I_k}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\beta, \text{spt } q) 2^{-\frac{k}{2}} \|q\|_{L^2}^2 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2},2}},$$

y por tanto, hemos demostrado la afirmación (3.2.3). □

**Afirmación 3.2.1.** Para  $\tau \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  y  $\beta_0 \in \mathbb{R}$ , escribimos

$$G_k(\tau) := \int_{\Lambda(\tau)} \int \int_{I_k(\eta)} |\hat{q}(\eta - \xi' - \tau')|^2 d\sigma(\xi') d\sigma(\tau') |\eta|^{\beta_0} d\sigma(\eta).$$

Entonces

$$G_k(\tau) \leq C(\beta_0) 2^{-2k} \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{q}(\lambda)|^2 |\lambda|^{\beta_0+3} d\lambda.$$

### Demostración de la afirmación 3.2.1

Para  $\eta \in \Lambda(\tau)$  podemos escribir  $\eta = \tau + sz$ , con  $z \perp \tau$ ,  $|z| = 1$ ,  $s > 0$ . Entonces  $d\sigma(\eta) = s ds d\sigma(z)$ , siendo  $d\sigma(z)$  la medida sobre la circunferencia unitaria  $S^1$  contenida en el plano  $\{\tau\}^\perp$ . Escribimos

$$\xi' = \frac{\eta}{2} + \frac{|\eta|}{2} u, \quad \tau' = \frac{\eta}{2} + \frac{|\eta|}{2} v,$$

con  $v \in S^2$ ,  $u \in S^2$ . Luego,

$$d\sigma(\xi') = |\eta|^2 d\sigma(u), \quad d\sigma(\tau') = |\eta|^2 d\sigma(v).$$

Teniendo en cuenta que si  $\xi', \tau' \in I_k(\eta)$  entonces se verifican las condiciones

$$|u - v| \leq 2^{-k+2}, \quad 1 + u \cdot v \geq \frac{1}{5000},$$

deducimos que

$$\begin{aligned} & \int_{\Lambda(\tau)} \int \int_{I_k(\eta)} |\hat{q}(\eta - \xi' - \tau')|^2 d\sigma(\xi') d\sigma(\tau') |\eta|^{\beta_0} d\sigma(\eta) \\ & \leq \int_0^\infty \int_{S^1} \int_{S^2} \int_{E_k(v)} \left| \hat{q} \left( \frac{h(s)}{2} (u + v) \right) \right|^2 h(s)^{\beta_0+4} d\sigma(u) d\sigma(v) d\sigma(z) ds, \end{aligned}$$

donde  $h(s) := |\eta| = (|\tau|^2 + s^2)^{\frac{1}{2}}$ ,  $E_k(v) := \{u \in S^2 : |u - v| \leq 2^{-k+2}, 1 + u \cdot v \geq \frac{1}{5000}\}$ .

Hagamos una descomposición más. Sea  $\mathcal{D}_k = \{A_j : 1 \leq j \leq 2^{2k}\}$  una familia de casquetes  $A_j$  de diámetro  $\frac{2^{-k}}{50}$  recubriendo la esfera  $S^2$ . Para cada  $j$ , sea

$$\tilde{A}_j := \left\{ u \in S^2 : |u - v| \leq 2^{-k+2}, 1 + u \cdot v \geq \frac{1}{5000}, \text{ para algún } v \in A_j \right\}.$$

Se puede elegir  $\mathcal{D}_k$  de manera que los conjuntos  $\tilde{A}_j$  tengan solapamiento finito con constante independiente de  $k$ . Para  $v \in A_j$  y  $u \in \tilde{A}_j$  se cumple  $|u + v| \geq \frac{1}{100}$  ( $\Leftrightarrow 1 + u \cdot v \geq \frac{1}{20000}$ ). En efecto: existe un  $v' \in A_j$  tal que  $1 + u \cdot v' \geq \frac{1}{5000}$  ( $\Leftrightarrow |u + v'| \geq \frac{1}{50}$ ) y se tiene

$$|u + v| \geq |u + v'| - |v - v'| \geq \frac{1}{50} - \frac{2^{-k}}{50} \geq \frac{1}{50} - \frac{1}{100} = \frac{1}{100}.$$

Tomamos coordenadas esféricas para  $u$  en la referencia canónica,

$$\xi' = \frac{\eta(s, z)}{2} + \frac{h(s)}{2}u = \frac{\tau + sz}{2} + \frac{h(s)}{2}(\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi).$$

Se cumple  $d\sigma(u) = \sin \phi d\phi d\theta$ . Denotamos

$$D_j := \{(\phi, \theta) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi) : u(\phi, \theta) \in \tilde{A}_j\}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{S^1} \int_{S^2} \int_{E_k(v)} \left| \hat{q} \left( \frac{h(s)}{2}(u + v) \right) \right|^2 h(s)^{\beta_0+4} d\sigma(u) d\sigma(v) d\sigma(z) ds \\ & \leq \sum_{j=1}^{2^{2k}} \int_0^\infty \int_{S^1} \int_{A_j} \int_{\tilde{A}_j} \left| \hat{q} \left( \frac{h(s)}{2}(u + v) \right) \right|^2 h(s)^{\beta_0+4} d\sigma(u) d\sigma(v) d\sigma(z) ds \\ & = \sum_{j=1}^{2^{2k}} \int_0^\infty \int_{S^1} \int_{A_j} \int \int_{D_j} \left| \hat{q} \left( \frac{h(s)}{2}(u(\phi, \theta) + v) \right) \right|^2 h(s)^{\beta_0+4} \sin \phi d\phi d\theta d\sigma(v) d\sigma(z) ds. \end{aligned}$$

Para  $z, j, v$  fijos cambiamos de coordenadas. Hacemos el cambio  $(s, \theta, \phi) \rightarrow \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , dado por

$$\lambda = \xi' + \tau' - \eta = \frac{h(s)}{2}(u + v) = \frac{h(s)}{2}(\cos \theta \sin \phi + v_1, \sin \theta \sin \phi + v_2, \cos \phi + v_3),$$

donde se escribe  $v = (v_1, v_2, v_3)$  en la referencia canónica de  $\mathbb{R}^3$ . Calculemos el Jacobiano de la transformación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial(s, \theta, \phi)} &= \frac{1}{8} \begin{vmatrix} \frac{s}{h(s)}(\cos \theta \sin \phi + v_1) & -h(s) \sin \theta \sin \phi & h(s) \cos \theta \cos \phi \\ \frac{s}{h(s)}(\sin \theta \sin \phi + v_2) & h(s) \cos \theta \sin \phi & h(s) \sin \theta \cos \phi \\ \frac{s}{h(s)}(\cos \phi + v_3) & 0 & -h(s) \sin \phi \end{vmatrix} \\ &= \frac{sh(s) \sin \phi}{8} \begin{vmatrix} \cos \theta \sin \phi + v_1 & -\sin \theta & \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi + v_2 & \cos \theta & \sin \theta \cos \phi \\ \cos \phi + v_3 & 0 & -\sin \phi \end{vmatrix} = -\frac{sh(s) \sin \phi}{8}(1 + u \cdot v), \end{aligned}$$

de donde se desprende que  $J(s, \theta, \phi) = \left| \frac{\partial(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial(s, \theta, \phi)} \right| = \frac{sh(s) \sin \phi (1 + u(\phi, \theta) \cdot v)}{8}$ . Para  $j$  y  $v \in A_j$  fijos, sabemos que si  $(\phi, \theta) \in D_j$  entonces  $1 + u(\phi, \theta) \cdot v \geq \frac{1}{20000}$ . Por tanto, el Jacobiano está acotado inferiormente por  $Csh(s) \sin \phi$ . Sabiendo que la condición  $|\xi' + \tau' - \eta| \geq \frac{|\eta|}{100}$  garantiza que  $h(s) \sim |\lambda|$ , es cierto que

$$\sum_{j=1}^{2^{2k}} \int_0^\infty \int_{S^1} \int_{A_j} \int \int_{D_j} \left| \hat{q} \left( \frac{h(s)}{2}(u(\phi, \theta) + v) \right) \right|^2 h(s)^{\beta_0+4} \sin \phi d\phi d\theta d\sigma(v) d\sigma(z) ds$$

$$\leq \sum_{j=1}^{2^{2k}} \int_{S^1} \int_{A_j} \int_{H_j} |\hat{q}(\lambda)|^2 |\lambda|^{\beta_0+3} d\lambda d\sigma(v) d\sigma(z),$$

donde  $H_j$  denota el cono convexo

$$\left\{ r \left( \frac{u+v}{2} \right) : u, v \in \tilde{A}_j, r > 0 \right\}.$$

Ya que los conjuntos  $H_j$  tienen solapamiento finito y la medida del casquete  $A_j$  es del orden de  $2^{-2k}$ , finalmente obtenemos

$$\begin{aligned} G_k(\tau) &\leq C \sum_{j=1}^{2^{2k}} 2^{-2k} \int_{H_j} |\hat{q}(\lambda)|^2 |\lambda|^{\beta_0+3} d\lambda \\ &\leq C 2^{-2k} \int_{\mathbb{R}^3} \left( \sum_{j=1}^{2^{2k}} \chi_{H_j}(\lambda) \right) |\hat{q}(\lambda)|^2 |\lambda|^{\beta_0+3} d\lambda \leq C 2^{-2k} \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{q}(\lambda)|^2 |\lambda|^{\beta_0+3} d\lambda. \end{aligned}$$

Queda vista la afirmación 3.2.1.

□

### Demostración de la afirmación (3.2.4)

En primer lugar, nótese que si  $(\xi, \tau) \in II(\eta)$  entonces o bien  $|\xi|, |\tau| \leq \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{100} \right) |\eta|$ , o bien  $|\eta - \xi|, |\eta - \tau| \leq \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{100} \right) |\eta|$ . En efecto: si  $|\xi| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} |\eta|$  se cumple

$$|\tau| \leq |\xi - \tau| + |\xi| \leq \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{100} \right) |\eta|.$$

Si  $|\xi| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} |\eta|$  se tiene  $|\eta - \xi| = (|\eta|^2 - |\xi|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} |\eta|$ , y podemos escribir

$$|\eta - \tau| \leq |\eta - \xi| + |\xi - \tau| \leq \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{100} \right) |\eta|.$$

Se verifica que  $II(\eta) \subset II_{<}(\eta) \cup II_{>}(\eta)$ , donde

$$\begin{aligned} II_{<}(\eta) &:= \left\{ (\xi, \tau) \in II(\eta) : |\xi|, |\tau| \leq \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{100} \right) |\eta| \right\}, \\ II_{>}(\eta) &:= \left\{ (\xi, \tau) \in II(\eta) : |\eta - \xi|, |\eta - \tau| \leq \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{100} \right) |\eta| \right\}. \end{aligned}$$

Escribimos

$$\widehat{Q_{II_{<}}(q)}(\eta) := \frac{1}{|\eta|^2} \int \int_{II_{<}(\eta)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau) \hat{q}(\tau - \xi)| d\sigma(\xi) d\sigma(\tau),$$

y la expresión análoga para el dominio  $II_{>}(\eta)$ . Los cambios de variable  $\xi = \eta - \xi'$ ,  $\tau = \eta - \tau'$  conducen a la identidad

$$\int_{II_{>}(\eta)} |\hat{q}(\xi') \hat{q}(\eta - \tau') \hat{q}(\tau' - \xi')| d\sigma(\xi') d\sigma(\tau')$$

$$= \int_{II_{<}(\eta)} |\hat{q}(\tau)\hat{q}(\eta - \xi)\hat{q}(\xi - \tau)| d\sigma(\xi)d\sigma(\tau),$$

lo que junto a la propiedad de simetría  $(\xi, \tau) \in II_{<}(\eta) \Leftrightarrow (\tau, \xi) \in II_{<}(\eta)$ , demuestra la igualdad  $Q_{II_{>}}(q) = Q_{II_{<}}(q)$ . Entonces

$$\left| \widehat{Q'_{II}}(q)(\eta) \right| \leq 2 \widehat{Q_{II_{<}}}(q)(\eta).$$

En este caso la estrategia será descomponer el conjunto  $II_{<}(\eta)$  como sigue

$$\begin{aligned} II_k(\eta) &:= \left\{ (\xi, \tau) \in II_{<}(\eta) : |\xi| \sim 2^{-k}|\eta|, |\xi| \geq |\tau| \right\}, \\ \widetilde{II}_k(\eta) &:= \left\{ (\xi, \tau) \in II_{<}(\eta) : |\tau| \sim 2^{-k}|\eta|, |\xi| < |\tau| \right\}, \end{aligned}$$

cumpléndose

$$II_{<}(\eta) \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left( II_k(\eta) \cup \widetilde{II}_k(\eta) \right).$$

Para  $k \geq 1$ , definimos de manera obvia los términos  $Q'_k(q)$ ,  $\widetilde{Q}'_k(q)$  asociados a los dominios  $II_k(\eta)$ ,  $\widetilde{II}_k(\eta)$ , respectivamente, en el lado de la transformada de Fourier. Afirmamos que

$$\|Q'_k(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\varepsilon)2^{-\varepsilon k} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{\dot{W}^{-\varepsilon,2}} \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2}+\varepsilon,2}}, \quad (3.2.4a)$$

$$\|\widetilde{Q}'_k(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\varepsilon)2^{-\varepsilon k} \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2}+\varepsilon,2}} \left[ \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{\dot{W}^{-\varepsilon,2}} + \|q\|_{L^2} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2}-\varepsilon,2}} \right]. \quad (3.2.4b)$$

### Demostración de la estimación (3.2.4a)

Como de costumbre, aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwartz,

$$\left| \widehat{Q'_k}(q)(\eta) \right|^2 \leq \frac{1}{|\eta|^4} \int \int_{II_k(\eta)} |\hat{q}(\xi)\hat{q}(\eta - \tau)|^2 d\sigma(\xi)d\sigma(\tau) \quad (3.2.7)$$

$$\times \int \int_{II_k(\eta)} |\hat{q}(\tau' - \xi')|^2 d\sigma(\xi')d\sigma(\tau'). \quad (3.2.8)$$

Integramos y cambiamos el orden de integración en  $\xi$  y en  $\tau$ , por el lema B.2:

$$\begin{aligned} &\|Q'_k(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |\eta|^{2\beta-4} \int_{L_k(\eta)} |\hat{q}(\xi)|^2 \int_{A(\eta,\xi)} |\hat{q}(\eta - \tau)|^2 F_k^1(\eta) d\sigma(\tau) d\sigma(\xi) d\eta \\ &\leq C(\varepsilon)2^{-2\varepsilon k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\hat{q}(\xi)|^2}{|\xi|^{1+2\varepsilon}} \int_{\widetilde{L}(\xi) \cap \{|\eta| \sim 2^k|\xi|\}} |\eta|^{2\beta-3+2\varepsilon} \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

$$\times \int_{A(\eta,\xi)} |\hat{q}(\eta - \tau)|^2 d\sigma(\tau) F_k^1(\eta) d\sigma(\eta) d\xi \quad (3.2.10)$$

$$\leq C(\varepsilon)2^{-2\varepsilon k} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}^2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\hat{q}(\xi)|^2}{|\xi|^{2\varepsilon}} F^3(\xi) d\xi \quad (3.2.11)$$

$$\leq C(\varepsilon)2^{-2\varepsilon k} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{q}(\xi)|^2 |\xi|^{-2\varepsilon} d\xi \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{q}(\lambda)|^2 |\lambda|^{2\beta-1+2\varepsilon} d\lambda, \quad (3.2.12)$$



donde denotamos

$$L_k(\eta) := \left\{ \xi \in \Gamma(\eta) : |\xi| \leq \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{100} \right) |\eta|, |\xi| \sim 2^{-k} |\eta| \right\},$$

$$\tilde{L}(\xi) := \left\{ \eta \in \Lambda(\xi) : |\xi| \leq \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{100} \right) |\eta| \right\}, \quad (3.2.13)$$

$$A(\eta, \xi) := \left\{ \tau \in \Gamma(\eta) : |\tau| \leq \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{100} \right) |\eta|, |\xi - \tau| \leq \frac{|\eta|}{100} \right\}, \quad (3.2.14)$$

y  $F_k^1(\eta)$ ,  $F^3(\xi)$  se definen en (3.4.1), (3.4.3). Además, pasamos de (3.2.9)-(3.2.10) a (3.2.11) en virtud de la parte (i) del lema 3.4.1, teniendo en cuenta que  $|\xi| \sim 2^{-k} |\eta|$ , y por tanto

$$F_k^1(\eta) \leq 2^{-k} |\eta|^2 \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2}, 2}}^2 \leq C |\eta| |\xi| \cdot \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2}, 2}}^2.$$

La parte (iii) del lema 3.4.1 permite acotar (3.2.11) por (3.2.12).

Queda probada la estimación (3.2.4a). □

### Demostración de la estimación (3.2.4b)

Dividimos el conjunto  $\widetilde{II}_k(\eta)$  en dos regiones  $\widetilde{II}_{k,j}(\eta)$ ,  $j = 1, 2$ , donde

$$\begin{aligned} \widetilde{II}_{k,1}(\eta) &:= \left\{ (\xi, \tau) \in \widetilde{II}_k(\eta) : |\xi| \geq 2^{-k-2} |\eta| \right\}, \\ \widetilde{II}_{k,2}(\eta) &:= \left\{ (\xi, \tau) \in \widetilde{II}_k(\eta) : |\xi| \leq 2^{-k-2} |\eta| \right\}. \end{aligned}$$

Denotamos  $\tilde{Q}'_{k,j}(q)$ ,  $j = 1, 2$ , de manera obvia. La norma de  $\tilde{Q}'_{k,1}(q)$  se acota de la misma forma que el término anterior  $Q'_k(q)$ . Nótese que si  $(\xi', \tau') \in \widetilde{II}_{k,1}(\eta)$  entonces  $(\tau', \xi') \in \mathcal{A}_k(\eta)$ , donde  $\mathcal{A}_k(\eta)$  se define en (3.4.4). Luego, en virtud de la parte (i) del lema 3.4.1, si  $|\xi| \geq 2^{-k-2} |\eta|$  se cumple

$$\int \int_{\widetilde{II}_{k,1}(\eta)} |\hat{q}(\tau' - \xi')|^2 d\sigma(\xi') d\sigma(\tau') \leq C 2^{-k} |\eta|^2 \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2}, 2}}^2 \leq C |\eta| |\xi| \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2}, 2}}^2.$$

La fórmula (3.2.4a) es cierta substituyendo  $Q'_k(q)$  por  $\tilde{Q}'_{k,1}(q)$ .

Vamos con el término  $\tilde{Q}'_{k,2}(q)$ . Para  $(\xi, \tau) \in \widetilde{II}_{k,2}(\eta)$ , se tiene que  $|\xi - \tau| \geq 2^{-k-2} |\eta|$ :

$$|\xi - \tau| \geq |\tau| - |\xi| \geq 2^{-k-1} |\eta| - 2^{-k-2} |\eta| = 2^{-k-2} |\eta|.$$

Aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwartz como en (3.2.7), (3.2.8). Si integramos y cambiamos el orden de integración en  $\xi$  y  $\eta$ , sacando provecho de la propiedad  $|\tau| \sim 2^{-k} |\eta|$ , sacrificando un  $\varepsilon$  de derivada para que converja la suma en  $k$  de las normas de todos los  $\tilde{Q}'_{k,2}(q)$ , nos queda

$$\|\tilde{Q}'_{k,2}(q)\|_{\dot{W}^{\beta, 2}}^2 \leq C(\varepsilon) 2^{-2\varepsilon k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\hat{q}(\xi)|^2}{|\xi|} \int_{\tilde{L}(\xi)} |\eta|^{2\beta-3+2\varepsilon} \quad (3.2.15)$$

$$\times \int_{A(\eta, \xi)} |\tau|^{-2\varepsilon} |\hat{q}(\eta - \tau)|^2 d\sigma(\tau) F_k^2(\eta) d\sigma(\eta) d\xi \quad (3.2.16)$$

$$\leq C(\varepsilon) 2^{-2\varepsilon k} \|q\|_{L^2}^2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\hat{q}(\xi)|^2}{|\xi|^{1+2\varepsilon}} F^3(\xi) d\xi \quad (3.2.17)$$

$$\leq C(\varepsilon) 2^{-2\varepsilon k} \|q\|_{L^2}^2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\hat{q}(\xi)|^2}{|\xi|^{1+2\varepsilon}} d\xi \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{q}(\lambda)|^2 |\lambda|^{2\beta-1+2\varepsilon} d\lambda, \quad (3.2.18)$$

donde  $\tilde{L}(\xi)$ ,  $A(\eta, \xi)$ ,  $F_k^2(\eta)$ ,  $F^3(\xi)$  se definen en (3.2.13), (3.2.14), (3.4.2), (3.4.3), respectivamente. Pasamos de (3.2.15)-(3.2.16) a (3.2.17) por la propiedad  $|\tau|^{-2\varepsilon} \leq |\xi|^{-2\varepsilon}$ , y por la parte (ii) del lema 3.4.1, teniendo presente que si  $(\xi', \tau') \in \widetilde{II}_{k,2}(\eta)$  entonces  $(\tau', \xi') \in \mathcal{B}_k(\eta)$ , definiéndose  $\mathcal{B}_k(\eta)$  en (3.4.5). La parte (ii) del lema 3.4.1 permite acotar (3.2.17) por (3.2.18). Hemos visto que

$$\|\tilde{Q}'_{k,2}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\varepsilon) 2^{-\varepsilon k} \|q\|_{L^2} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2}-\varepsilon,2}} \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2}+\varepsilon,2}}.$$

Esto termina la prueba de la estimación (3.2.4b), la afirmación (3.2.4) y el lema 3.2.1.  $\square$

### 3.2.2. Estimación de los términos de valor principal

Como ocurría con el término cuadrático, el control de los términos de valor principal (2.2.1), (2.2.2) se realiza mediante ligeras modificaciones de la demostración de la estimación del término esférico  $Q'(q)$ . Dejamos los detalles al lector. Aclaremos, sin embargo, un detalle técnico. Puesto que aquí no tenemos simetría entre los casos  $|\xi| \geq |\eta - \xi|$ , y  $|\xi| \leq |\eta - \xi|$ , debemos considerar ambos casos por separado. En el segundo, para  $\delta \ll 1$ , necesitaremos definir

$$\Gamma_\delta(\eta) := \left\{ \xi \in \mathbb{R}^3 : \left| \left| \xi - \frac{\eta}{2} \right| - \frac{|\eta|}{2} \right| < \delta |\eta|, \left( \xi - \frac{\eta}{2} \right) \cdot \eta < 0 \right\}.$$

Así como

$$\Lambda_\delta(\xi) := \{ \eta \in \mathbb{R}^3 : \xi \in \Gamma_\delta(\eta) \}.$$

Para  $\xi \in \Gamma_\delta(\eta)$ , sea  $\tilde{\xi}$  la proyección de  $\xi$  sobre  $\Gamma(\eta)$  definida por  $\tilde{\xi} \cdot (\xi - \eta) = 0$ . Para  $z = \tilde{\xi}/|\tilde{\xi}|$ , tenemos  $\tilde{\xi} = (\xi \cdot z)z$ . Entonces  $\eta = \tilde{\xi} + r(\xi - \tilde{\xi})$  para algún  $r \gg 1$ . Teniendo en cuenta esto, vemos que cualquier  $\eta \in \Lambda_\delta(\xi)$  puede escribirse como  $\eta = (\xi \cdot z)z + r(\xi - (\xi \cdot z)z)$  para algún  $r \gg 1$ ,  $z \in S^2$ . Además, para  $\xi$  fijo, el ángulo entre  $\xi$  y  $z$  es menor que  $c\delta$ .

Finalmente, tenemos que controlar un término próximo a las singularidades en las integrales de valor principal. Como en el caso del término cuadrático, esto se consigue compensando signos y utilizando la estimación para las diferencias segundas que ya señalamos en 2d:

$$\begin{aligned} |\hat{q}(z) - \hat{q}(z - x + y) + \hat{q}(y) - \hat{q}(x)| &\leq C|z - x||x - y| (M^2(|D^2\hat{q}|)(x) + M^2(|D^2\hat{q}|)(y) \\ &\quad + M^2(|D^2\hat{q}|)(z) + M^2(|D^2\hat{q}|)(z - x + y)). \end{aligned}$$

### 3.3. Ganancia de regularidad de $Q_4(q)$ respecto de $q$

En esta sección vamos a probar en detalle la ganancia de casi media derivada del término cuártico, módulo una función de la clase  $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ , respecto del potencial que se establece en el teorema 1.5.4. En primer lugar, consideramos la siguiente caracterización del término cuártico obtenida a partir de la expresión para la resolvente saliente (1.2.3) (véase la nota C.2.1).

**Proposición 3.3.1.** Para  $n \geq 2$  y  $\eta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,

$$\widehat{Q_4(q)}(\eta) = v.p. \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\hat{q}(\xi)\hat{q}(\eta-\tau)\hat{q}(\tau-\phi)\hat{q}(\phi-\xi)}{[\xi \cdot (\eta-\xi)][\tau \cdot (\eta-\tau)][\phi \cdot (\eta-\phi)]} d\xi d\tau d\phi \quad (3.3.1)$$

$$+ 2 \frac{i\pi}{|\eta|} v.p. \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Gamma(\eta)} \frac{\hat{q}(\xi)\hat{q}(\eta-\tau)\hat{q}(\tau-\phi)\hat{q}(\phi-\xi)}{[\tau \cdot (\eta-\tau)][\phi \cdot (\eta-\phi)]} d\sigma(\xi) d\tau d\phi \quad (3.3.2)$$

$$+ \frac{i\pi}{|\eta|} v.p. \int_{\Gamma(\eta)} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\hat{q}(\xi)\hat{q}(\eta-\tau)\hat{q}(\tau-\phi)\hat{q}(\phi-\xi)}{[\xi \cdot (\eta-\xi)][\tau \cdot (\eta-\tau)]} d\xi d\tau d\sigma(\phi) \quad (3.3.3)$$

$$- 2 \frac{\pi^2}{|\eta|^2} v.p. \int_{\Gamma(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\hat{q}(\xi)\hat{q}(\eta-\tau)\hat{q}(\tau-\phi)\hat{q}(\phi-\xi)}{\xi \cdot (\eta-\xi)} d\xi d\sigma(\tau) d\sigma(\phi) \quad (3.3.4)$$

$$- \frac{\pi^2}{|\eta|^2} v.p. \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Gamma(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \frac{\hat{q}(\xi)\hat{q}(\eta-\tau)\hat{q}(\tau-\phi)\hat{q}(\phi-\xi)}{\phi \cdot (\eta-\phi)} d\sigma(\xi) d\sigma(\tau) d\phi \quad (3.3.5)$$

$$- \frac{i\pi^3}{|\eta|^3} \int_{\Gamma(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \hat{q}(\xi)\hat{q}(\eta-\tau)\hat{q}(\tau-\phi)\hat{q}(\phi-\xi) d\sigma(\xi) d\sigma(\tau) d\sigma(\phi). \quad (3.3.6)$$

Entraremos en detalle a la hora de acotar el término esférico que aparece en la expresión de  $\widehat{Q_4(q)}(\eta)$  en (3.3.6). Como ocurría con los términos anteriores de la serie de Neumann-Born, el término esférico es la base para entender la estructura del término cuártico. Los términos de valor principal (3.3.1), (3.3.2), (3.3.3), (3.3.4), (3.3.5) se controlan de manera similar a la parte esférica descomponiendo el espacio en coronas diádicas de manera análoga a las estrategias estudiadas en esta memoria en dimensión 2 para  $Q_2(q)$ ,  $Q_3(q)$ . Por esta razón, omitiremos el control de dichos términos de valor principal.

**Notación.** Para todo  $\eta \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , escribimos

$$\widehat{P'(q)}(\eta) := \frac{1}{|\eta|^3} \int_{\Gamma(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \hat{q}(\xi)\hat{q}(\eta-\tau)\hat{q}(\tau-\phi)\hat{q}(\phi-\xi) d\sigma(\xi) d\sigma(\tau) d\sigma(\phi).$$

#### 3.3.1. Estimación del término esférico $P'(q)$

Vamos a ver que  $P'(q) \in W^{\beta,2}(\mathbb{R}^3) + C^\infty(\mathbb{R}^3)$ , para todo  $\beta$  real tal que  $0 \leq \beta < \alpha + 1/2$ . Consideramos la descomposición:  $\Gamma(\eta)^3 = I(\eta) \cup II(\eta) \cup III(\eta) \cup IV(\eta)$ , donde

$$I(\eta) := \{(\xi, \tau, \phi) \in \Gamma(\eta)^3 : |\phi - \xi| \geq \frac{|\eta|}{100}, |\phi - \tau| \geq \frac{|\eta|}{100}\},$$

$$II(\eta) := \{(\xi, \tau, \phi) \in \Gamma(\eta)^3 : |\phi - \xi| \geq \frac{|\eta|}{100}, |\phi - \tau| \leq \frac{|\eta|}{100}\},$$

$$III(\eta) := \{(\xi, \tau, \phi) \in \Gamma(\eta)^3 : |\phi - \xi| \leq \frac{|\eta|}{100}, |\phi - \tau| \geq \frac{|\eta|}{100}\},$$

$$IV(\eta) := \{(\xi, \tau, \phi) \in \Gamma(\eta)^3 : |\phi - \xi| \leq \frac{|\eta|}{100}, |\phi - \tau| \leq \frac{|\eta|}{100}\}.$$

Denotamos  $\widehat{P'_I(q)}(\eta) := \frac{1}{|\eta|^3} \int \int \int_{I(\eta)} \hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau) \hat{q}(\tau - \phi) \hat{q}(\phi - \xi) d\sigma(\xi) d\sigma(\tau) d\sigma(\phi)$ , y  $\widehat{P'_{II}(q)}(\eta)$ ,  $\widehat{P'_{III}(q)}(\eta)$ ,  $\widehat{P'_{IV}(q)}(\eta)$  de manera análoga. Se cumple

$$P'(q) = P'_I(q) + P'_{II}(q) + P'_{III}(q) + P'_{IV}(q).$$

Formulamos las siguientes afirmaciones siendo  $0 < \varepsilon < 1$ :

$$\|P'_I(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C \left( \|q\|_{L^2}^3 + \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{L^2}^2 \right) \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1/2,2}}, \quad (3.3.7)$$

$$\|\mathcal{F}^{-1}(\chi \mathcal{F}(P'_{II}(q)))\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C \left( \|q\|_{L^2}^3 + \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{L^2}^2 \right) \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1/2,2}}, \quad (3.3.8)$$

$$\|P'_{IV}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C \left( \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{\dot{W}^{-\varepsilon,2}} \|q\|_{L^2} + \|q\|_{L^2}^2 \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2}-\varepsilon,2}} \right) \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2}+\varepsilon,2}}, \quad (3.3.9)$$

donde  $C > 0$  sólo depende de  $\alpha, \beta$  y del soporte de  $q$ .

**Nota.** La afirmación (3.3.8) se verifica si  $-1 < \beta < 2$ , pero esta condición se cumple para cualquier  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que  $-1 < \beta < \alpha + 1/2$  donde  $0 \leq \alpha < 3/2$ . Por otra parte, el término  $P'_{III}(q)$  también satisface la estimación (3.3.8) puesto que  $P'_{II}(q) = P'_{III}(q)$  como se deduce de la siguiente identidad tomando los cambios de variable  $\xi' = \eta - \tau$ ,  $\tau' = \eta - \xi$ ,  $\phi' = \eta - \phi$ :

$$\begin{aligned} & \int \int \int_{III(\eta)} \hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau) \hat{q}(\tau - \phi) \hat{q}(\phi - \xi) d\sigma(\xi) d\sigma(\tau) d\sigma(\phi) \\ &= \int \int \int_{II(\eta)} \hat{q}(\xi') \hat{q}(\eta - \tau') \hat{q}(\tau' - \phi') \hat{q}(\phi' - \xi') d\sigma(\xi') d\sigma(\tau') d\sigma(\phi'). \end{aligned}$$

A partir de las afirmaciones (3.3.7), (3.3.8), (3.3.9) se obtiene que en las hipótesis del teorema 1.5.4 existe una constante  $C(\alpha, \beta, q) > 0$  que depende de  $\alpha, \beta$  y del soporte de  $q$  tal que

$$\begin{aligned} \|P'(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} &\leq C(\alpha, \beta, q) \left( \|q\|_{L^2}^3 + \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{L^2}^2 + \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{\dot{W}^{-\varepsilon,2}} \|q\|_{L^2} \right. \\ &\quad \left. + \|q\|_{L^2}^2 \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2}-\varepsilon,2}} \right) \|q\|_{\dot{W}^{\alpha,2}}, \end{aligned}$$

donde  $\varepsilon := \alpha + \frac{1}{2} - \beta > 0$ .

Haciendo  $\beta = 0$  en estas afirmaciones (3.3.7), (3.3.8), (3.3.9) se deduce que la función  $\mathcal{F}^{-1}(\chi \mathcal{F}(P'(q)))$  está en  $L^2(\mathbb{R}^3)$ . Y de hecho,  $\mathcal{F}^{-1}(\chi \mathcal{F}(P'(q))) \in W^{\beta,2}(\mathbb{R}^3)$  para todo  $\beta$  con  $0 \leq \beta < \alpha + 1/2$ . Sabiendo que la función  $(1 - \chi) \mathcal{F}(P'(q))$  tiene soporte compacto se concluye que

$$P'(q) \in W^{\beta,2}(\mathbb{R}^3) + C^\infty(\mathbb{R}^3).$$

**Demostración de la afirmación (3.3.8)**

Haciendo el cambio de variable  $\phi = \eta - \phi'$ , se tiene

$$\begin{aligned}\widehat{P'_{II}}(q)(\eta) &= \frac{1}{|\eta|^3} \int \int \int_{II(\eta)} \hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau) \hat{q}(\tau - \phi') \hat{q}(\phi' - \xi) d\sigma(\xi) d\sigma(\tau) d\sigma(\phi') \\ &= \frac{1}{|\eta|^3} \int \int \int_{\widetilde{II}(\eta)} \hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau) \hat{q}(\tau + \phi - \eta) \hat{q}(\eta - \phi - \xi) d\sigma(\xi) d\sigma(\tau) d\sigma(\phi),\end{aligned}$$

donde  $\widetilde{II}(\eta) := \{(\xi, \tau, \phi) \in \Gamma(\eta)^3 : (\xi, \tau, \eta - \phi) \in II(\eta)\}$ .

Para  $\eta \in \mathbb{R}^3$  fijo con  $|\eta| \geq 2$ , descomponemos el dominio de integración  $\widetilde{II}(\eta)$  como sigue:

$$\widetilde{II}(\eta) = \bigcup_{k=1}^{\lfloor \log_2(\eta) \rfloor} II_k(\eta) \cup \widetilde{II}_k(\eta) \cup II_\infty(\eta),$$

donde para  $1 \leq k \leq \lfloor \log_2 |\eta| \rfloor$ , escribimos

$$\begin{aligned}II_k(\eta) &:= \left\{ |\eta - \tau - \phi| \leq \frac{|\eta|}{100}, |\eta - \xi - \phi| \geq \frac{|\eta|}{100}, |\phi - \xi| \sim 2^{-k} |\eta|, |\phi| \leq |\xi| \right\}, \\ \widetilde{II}_k(\eta) &:= \left\{ |\eta - \tau - \phi| \leq \frac{|\eta|}{100}, |\eta - \xi - \phi| \geq \frac{|\eta|}{100}, |\phi - \xi| \sim 2^{-k} |\eta|, |\xi| \leq |\phi| \right\}, \\ II_\infty(\eta) &:= \left\{ |\eta - \tau - \phi| \leq \frac{|\eta|}{100}, |\eta - \xi - \phi| \geq \frac{|\eta|}{100}, |\phi - \xi| \leq 1 \right\},\end{aligned}$$

donde  $(\xi, \tau, \phi) \in \Gamma(\eta)^3$ . Para cada  $k \geq 1$  se define

$$\widehat{P_{II_k}}(q)(\eta) := \frac{1}{|\eta|^3} \int \int \int_{II_k(\eta)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau) \hat{q}(\tau + \phi - \eta)| \quad (3.3.10)$$

$$\times |\hat{q}(\eta - \phi - \xi)| d\sigma(\xi) d\sigma(\tau) d\sigma(\phi) \chi(\eta), \quad (3.3.11)$$

y la expresión análoga para  $\widehat{P_{\widetilde{II}_k}}(q)$ ,  $\widehat{P_{II_\infty}}(q)$ . Para  $|\eta| \geq 10$  se cumple

$$\left| \widehat{P'_{II}}(q)(\eta) \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \widehat{P_{II_k}}(q)(\eta) + \widehat{P_{\widetilde{II}_k}}(q)(\eta) \right) + \widehat{P_{II_\infty}}(q)(\eta),$$

y por la desigualdad de Minkowski,

$$\begin{aligned}& \|\mathcal{F}^{-1}(\chi \mathcal{F}(P'_{II}(q)))\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \\ & \leq \left\| \sum_{k=1}^{+\infty} \left( P_{II_k}(q) + P_{\widetilde{II}_k}(q) \right) + P_{II_\infty}(q) \right\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \\ & \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \|P_{II_k}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} + \|P_{\widetilde{II}_k}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \right) + \|P_{II_\infty}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}.\end{aligned}$$

Para todo entero  $k \geq 1$  afirmamos que

$$\|P_{II_k}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C 2^{-k/2} \|q\|_{L^2}^3 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2},2}}, \quad (3.3.8a)$$

$$\|P_{II_k}^{\sim}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C 2^{-k/2} \left( \|q\|_{L^2} + \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \right) \|q\|_{L^2}^2 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2},2}}, \quad (3.3.8b)$$

$$\|P_{II_\infty}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq \begin{cases} C \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{L^2}^2 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1,2}}, & \text{si } -\frac{1}{2} < \beta < \frac{5}{2}, \\ C \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{L^2}^2 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2},2}}, & \text{si } -1 < \beta < 2. \end{cases} \quad (3.3.8c)$$

La expresión (3.3.8) se deduce de estas tres estimaciones. En las demostraciones para estas estimaciones hacemos uso de las notaciones del lema 3.4.2 que constituye la herramienta fundamental para obtenerlas y ubicamos en la subsección de resultados clave por cuestiones de claridad.

### Demostración de la estimación (3.3.8a)

Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz y para  $|\eta| \geq 2^k$ :

$$\widehat{P_{II_k}(q)}(\eta) \leq \frac{1}{|\eta|^3} \left( \int \int \int_{II_k(\eta)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\tau + \phi - \eta)|^2 d\sigma(\xi) d\sigma(\tau) d\sigma(\phi) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.3.12)$$

$$\times \left( \int \int \int_{II_k(\eta)} |\hat{q}(\eta - \tau') \hat{q}(\eta - \phi' - \xi')|^2 d\sigma(\xi') d\sigma(\tau') d\sigma(\phi') \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.3.13)$$

Acotando por el operador maximal de manera análoga a como hicimos en (3.2.6), en virtud de la parte (1) del lema B.1, se verifica

$$\begin{aligned} & \int \int_{\Gamma(\eta) \times \Gamma(\eta)} |\hat{q}(\tau + \phi - \eta)|^2 d\sigma(\tau) d\sigma(\phi) \\ & \leq C \int_{\Gamma(\eta)} \int_{\Gamma_1(\eta)} M \hat{q}(x + \phi - \eta)^2 dx d\sigma(\phi) \\ & \leq C \int_{\Gamma(\eta)} \int_{\mathbb{R}^2} M \hat{q}(x)^2 dx d\sigma(\phi) \leq C |\eta|^2 \|q\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

donde  $\Gamma_1(\eta)$  se definió en (3.2.5). Por este tipo de argumento, también es cierto que

$$\int_{\Gamma(\eta)} |\hat{q}(\eta - \tau')|^2 d\sigma(\tau') \leq C \|q\|_{L^2}^2.$$

Téngase en cuenta que si  $(\xi, \tau, \phi) \in II_k(\eta)$  entonces

$$|\xi| \geq |\phi - \xi| - |\phi| \geq 2^{-k-1}|\eta| - |\xi| \Rightarrow |\xi| \geq 2^{-k-2}|\eta|.$$

Por todo ello, y cambiando el orden de integración en  $\xi$  y  $\eta$  por el lema B.2,

$$\begin{aligned} \|P_{II_k}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}^2 & \leq C \|q\|_{L^2}^4 \int_{\mathbb{R}^3} |\eta|^{2\beta-4} \int_{\{\xi \in \Gamma(\eta) : |\xi| \geq 2^{-k-2}|\eta|\}} |\hat{q}(\xi)|^2 \\ & \quad \times \int \int_{B_k(\eta)} |\hat{q}(\eta - \phi' - \xi')|^2 d\sigma(\xi') d\sigma(\phi') d\sigma(\xi) d\eta \\ & = C \|q\|_{L^2}^4 \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{q}(\xi)|^2 \int_{\{\eta \in \Lambda(\xi) : |\xi| \geq 2^{-k-2}|\eta|\}} \frac{|\eta|}{|\xi|} |\eta|^{2\beta-4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int \int_{B_k(\eta)} |\hat{q}(\eta - \phi' - \xi')|^2 d\sigma(\xi') d\sigma(\phi') d\sigma(\eta) d\xi \\
& \leq C 2^k \|q\|_{L^2}^4 \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{q}(\xi)|^2 H_k^1(\xi) d\xi \\
& \leq C 2^{-k} \|q\|_{L^2}^6 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2},2}}^2,
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se desprende de la parte (i) del lema 3.4.2 y  $H_k^1(\xi)$  se define en (3.4.12). Además

$$B_k(\eta) := \left\{ (\xi', \phi') \in \Gamma(\eta) \times \Gamma(\eta) : |\xi' - \phi'| \leq 2^{-k+1}|\eta|, |\eta - \phi' - \xi'| \geq \frac{|\eta|}{100} \right\}. \quad (3.3.14)$$

Hemos probado la estimación (3.3.8a).

□

### Demostración de la estimación (3.3.8b)

Hacemos  $\widetilde{II}_k(\eta) = \widetilde{II}_k^1(\eta) \cup \widetilde{II}_k^2(\eta)$ , donde

$$\begin{aligned}
\widetilde{II}_k^1(\eta) &:= \left\{ (\xi, \tau, \phi) \in \widetilde{II}_k(\eta) : |\eta - \phi - \tau| \leq 2^{-k-3}|\eta| \right\}, \\
\widetilde{II}_k^2(\eta) &:= \left\{ (\xi, \tau, \phi) \in \widetilde{II}_k(\eta) : |\eta - \phi - \tau| \geq 2^{-k-3}|\eta| \right\}.
\end{aligned}$$

Denotamos por  $\widehat{P_{\widetilde{II}_k^j}(q)}(\eta)$  las expresiones análogas a (3.3.10)-(3.3.11) para los dominios  $\widetilde{II}_k^j(\eta)$ , con  $j \in \{1, 2\}$ .

Caso  $\widetilde{II}_k^1(\eta)$ .

En esta región, se cumple

$$|\eta - \tau| \geq |\phi| - |\eta - \tau - \phi| \geq 2^{-k-2}|\eta| - 2^{-k-3}|\eta| = 2^{-k-3}|\eta|.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz para  $|\eta| \geq 2^k$ :

$$\begin{aligned}
& \widehat{P_{\widetilde{II}_k^1}(q)}(\eta) \\
& \leq \frac{1}{|\eta|^3} \left( \int \int \int_{\widetilde{II}_k^1(\eta)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau)|^2 d\sigma(\xi) d\sigma(\tau) d\sigma(\phi) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.3.15)
\end{aligned}$$

$$\times \left( \int \int \int_{\widetilde{II}_k^1(\eta)} |\hat{q}(\tau' + \phi' - \eta) \hat{q}(\eta - \phi' - \xi')|^2 d\sigma(\xi') d\sigma(\tau') d\sigma(\phi') \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.3.16)$$

De nuevo, usando el argumento aplicado en (3.2.6), en virtud de la parte (1) del lema B.1, se cumple  $\int_{\Gamma(\eta)} |\hat{q}(\xi)|^2 d\sigma(\xi) \leq C \|q\|_{L^2}^2$ , y en virtud del teorema de Fubini y dicho lema, para cada  $\xi', \phi' \in \Gamma(\eta)$ , se tiene

$$\int_{\Gamma(\eta)} |\hat{q}(\tau' + \phi' - \eta)|^2 d\sigma(\tau') \leq C \|q\|_{L^2}^2.$$



Por tanto,

$$\begin{aligned} \widehat{P_{\widetilde{II}_k^1}(q)}(\eta) &\leq \frac{C}{|\eta|^2} \left( \int_{\{\tau \in \Gamma(\eta) : |\eta - \tau| \geq 2^{-k-3}|\eta|\}} |\hat{q}(\eta - \tau)|^2 d\sigma(\tau) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \chi_{\{|\eta| \geq 2^k\}}(\eta) \|q\|_{L^2}^2 \left( \int \int_{B_k(\eta)} |\hat{q}(\eta - \phi' - \xi')|^2 d\sigma(\xi') d\sigma(\phi') \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Tomando el cambio de variable  $\zeta = \eta - \tau$ , y cambiando el orden de integración en  $\zeta$  y  $\eta$  por el lema B.2, podemos escribir

$$\begin{aligned} \|P_{\widetilde{II}_k^1}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}^2 &\leq C \|q\|_{L^2}^4 \int_{\mathbb{R}^3} |\eta|^{2\beta-4} \int_{\{\zeta \in \Gamma(\eta) : |\zeta| \geq 2^{-k-3}|\eta|\}} |\hat{q}(\zeta)|^2 d\sigma(\zeta) \\ &\quad \times \int \int_{B_k(\eta)} |\hat{q}(\eta - \phi' - \xi')|^2 d\sigma(\xi') d\sigma(\phi') d\eta \\ &= C \|q\|_{L^2}^4 \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{q}(\zeta)|^2 \int_{\{\eta \in \Lambda(\zeta) : |\zeta| \geq 2^{-k-3}|\eta|\}} \frac{|\eta|}{|\zeta|} |\eta|^{2\beta-4} \\ &\quad \times \int \int_{B_k(\eta)} |\hat{q}(\eta - \phi' - \xi')|^2 d\sigma(\xi') d\sigma(\phi') d\sigma(\eta) d\zeta \\ &\leq C \|q\|_{L^2}^4 2^k \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{q}(\zeta)|^2 H_k^1(\zeta) d\zeta \leq C 2^{-k} \|q\|_{L^2}^6 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2},2}}^2, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se desprende de la parte (i) del lema 3.4.2 y  $B_k(\eta)$ ,  $H_k^1(\zeta)$  se definen en (3.3.14), (3.4.12). Por tanto,

$$\|P_{\widetilde{II}_k^1}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C 2^{-k/2} \|q\|_{L^2}^3 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2},2}}. \quad (3.3.17)$$

*Caso  $\widetilde{II}_k^2(\eta)$ .*

Consideramos la descomposición  $\widetilde{II}_k^2(\eta) = \widetilde{II}_{k,a}^2(\eta) \cup \widetilde{II}_{k,b}^2(\eta)$ , donde

$$\begin{aligned} \widetilde{II}_{k,a}^2(\eta) &:= \left\{ (\xi, \tau, \phi) \in \widetilde{II}_k^2(\eta) : |\eta - \tau| \leq |\phi| \right\}, \\ \widetilde{II}_{k,b}^2(\eta) &:= \left\{ (\xi, \tau, \phi) \in \widetilde{II}_k^2(\eta) : |\eta - \tau| \geq |\phi| \right\}. \end{aligned}$$

Escribimos para  $l \in \{a, b\}$ ,

$$\begin{aligned} \widehat{P_{\widetilde{II}_{k,l}^2}(q)}(\eta) &:= \chi_{\{|\eta| \geq 2^k\}}(\eta) \frac{1}{|\eta|^3} \int \int \int_{\widetilde{II}_{k,l}^2(\eta)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau)| \\ &\quad \times |\hat{q}(\tau + \phi - \eta) \hat{q}(\eta - \phi - \xi)| d\sigma(\xi) d\sigma(\tau) d\sigma(\phi). \end{aligned}$$

Empecemos con la región  $\widetilde{II}_{k,a}^2(\eta)$ . Si  $|\xi| \geq 2^{-k}|\eta|$  podemos seguir las líneas de la demostración del caso  $II_k(\eta)$ . De modo que si hacemos una división más, a saber  $\widetilde{II}_{k,a}^2(\eta) = \widetilde{II}_{k,a,1}^2(\eta) \cup \widetilde{II}_{k,a,2}^2(\eta)$ , donde

$$\widetilde{II}_{k,a,1}^2(\eta) := \left\{ (\xi, \tau, \phi) \in \widetilde{II}_{k,a}^2(\eta) : |\xi| \geq 2^{-k}|\eta| \right\},$$



$$\widetilde{II}_{k,a,2}^2(\eta) := \left\{ (\xi, \tau, \phi) \in \widetilde{II}_{k,a}^2(\eta) : |\xi| \leq 2^{-k}|\eta| \right\},$$

con las notaciones obvias para  $\mathcal{F}(P_{\widetilde{II}_{k,a,j}^2}(q))(\eta)$ ,  $j \in \{1, 2\}$ , podemos escribir

$$\|P_{\widetilde{II}_{k,a,1}^2}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C 2^{-k/2} \|q\|_{L^2}^3 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2},2}}. \quad (3.3.18)$$

Así, nos limitamos al caso  $\widetilde{II}_{k,a,2}^2(\eta)$ , donde  $|\xi| \leq 2^{-k}|\eta|$ . Se tiene

$$|\phi| \leq |\phi - \xi| + |\xi| \leq 2^{-k+1}|\eta| + 2^{-k}|\eta| = 3 \cdot 2^{-k}|\eta|.$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwartz como en (3.3.12), (3.3.13) y haciendo

$$\int_{\Gamma(\eta)} |\hat{q}(\eta - \tau')|^2 d\sigma(\tau') \leq C \|q\|_{L^2}^2,$$

utilizando la parte (1) del lema B.1, nos queda

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(P_{\widetilde{II}_{k,a,2}^2}(q))(\eta) &\leq \frac{C}{|\eta|^3} \left( \int_{\widetilde{II}_{k,a,2}^2(\eta)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\tau + \phi - \eta)|^2 d\sigma(\xi) d\sigma(\tau) d\sigma(\phi) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\times \left( \int \int_{B_k(\eta)} |\hat{q}(\eta - \phi' - \xi')|^2 d\sigma(\xi') d\sigma(\phi') \right)^{\frac{1}{2}} \chi_{\{|\eta| \geq 2^k\}}(\eta) \|q\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Tomando el cambio de variable  $\zeta = \eta - \tau$ , tenemos

$$\|P_{\widetilde{II}_{k,a,2}^2}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}^2 \leq C \|q\|_{L^2}^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\eta|^{2\beta-6} \int_{\Gamma(\eta)} |\hat{q}(\xi)|^2 d\sigma(\xi) \quad (3.3.19)$$

$$\times \int \int_{\widetilde{B}_k(\eta)} |\hat{q}(\phi - \zeta)|^2 d\sigma(\zeta) d\sigma(\phi) \quad (3.3.20)$$

$$\times \int \int_{B_k(\eta)} |\hat{q}(\eta - \phi' - \xi')|^2 d\sigma(\xi') d\sigma(\phi') d\eta \quad (3.3.21)$$

$$\leq C \|q\|_{L^2}^4 \int_{\mathbb{R}^3} |\eta|^{2\beta-5} \int_{\Gamma(\eta)} |\hat{q}(\xi)|^2 d\sigma(\xi) \quad (3.3.22)$$

$$\times \int \int_{B_k(\eta)} |\hat{q}(\eta - \phi' - \xi')|^2 d\sigma(\xi') d\sigma(\phi') d\eta \quad (3.3.23)$$

$$\leq C \|q\|_{L^2}^4 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\hat{q}(\xi)|^2}{|\xi|} H_k^1(\xi) d\xi \quad (3.3.24)$$

$$\leq C 2^{-2k} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}^2 \|q\|_{L^2}^4 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2},2}}^2,$$

donde  $\widetilde{B}_k(\eta)$  es similar al conjunto  $B_k(\eta)$  definido en (3.4.5) cambiando los roles de  $\xi'$ ,  $\tau'$  y ciertas constantes positivas que no impiden aplicar la parte (ii) del lema 3.4.1, estimando (3.3.19)-(3.3.21) por (3.3.22)-(3.3.23). Cambiamos el orden de integración en  $\xi$  y  $\eta$ , por el lema B.2, pasando de (3.3.22)-(3.3.23) a (3.3.24). La última desigualdad se desprende del lema 3.4.2, y  $B_k(\eta)$ ,  $H_k^1(\xi)$  se definen en (3.3.14), (3.4.12). Hemos probado que

$$\|P_{\widetilde{II}_{k,a,2}^2}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C 2^{-k} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{L^2}^2 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2},2}}. \quad (3.3.25)$$

Sigamos con la región  $\widetilde{II}_{k,b}^2(\eta)$ . En esta región se cumple  $|\eta - \tau| \geq 2^{-k-4}|\eta|$ :

$$|\eta - \tau| \geq |\eta - \phi - \tau| - |\phi| \geq 2^{-k-3}|\eta| - |\eta - \tau| \quad \Rightarrow \quad |\eta - \tau| \geq 2^{-k-4}|\eta|.$$

Esta condición nos permite seguir las líneas de demostración del caso  $\widetilde{II}_k^1(\eta)$ , obteniendo

$$\|P_{\widetilde{II}_{k,b}^2}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C 2^{-k/2} \|q\|_{L^2}^3 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2},2}}. \quad (3.3.26)$$

De (3.3.18), (3.3.25), (3.3.26) se deduce

$$\|P_{\widetilde{II}_k^2}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C 2^{-k/2} \left( \|q\|_{L^2} + \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \right) \|q\|_{L^2}^2 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2},2}}. \quad (3.3.27)$$

Por fin, la estimación (3.3.8b) se desprende de (3.3.17) y (3.3.27).  $\square$

### Demostración de la estimación (3.3.8c)

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwartz como en (3.3.15)-(3.3.16), usando el argumento aplicado en (3.2.6), en virtud de la parte (1) del lema B.1, que permite obtener

$$\int_{\Gamma(\eta)} |\hat{q}(\tau' + \phi' - \eta)| d\sigma(\phi') \leq C \|q\|_{L^2}^2, \quad \int_{\Gamma(\eta)} |\hat{q}(\eta - \tau)|^2 d\sigma(\tau) \leq C \|q\|_{L^2}^2,$$

para  $\eta \in \mathbb{R}^3$ ,  $\tau' \in \Gamma(\eta)$  fijos, teniendo en cuenta que si  $|(\eta - \phi' - \xi') - (\eta - 2\xi')| = |\phi' - \xi'| \leq 1$  entonces

$$|\hat{q}(\eta - \phi' - \xi')| \leq CM \hat{q}(\eta - 2\xi'),$$

también por la parte (1) del lema B.1, y además

$$\int_{\Gamma(\eta)} \int_{\Gamma(\eta) \cap B(\xi,1)} |\hat{q}(\xi)|^2 d\sigma(\phi) d\sigma(\xi) \leq \int_{\Gamma(\eta)} |\hat{q}(\xi)|^2 \sigma(B(\xi,1)) d\sigma(\xi) = C \int_{\Gamma(\eta)} |\hat{q}(\xi)|^2 d\sigma(\xi),$$

se llega a

$$\widehat{PI_\infty}(q)(\eta) \leq \frac{C}{|\eta|^2} \|q\|_{L^2}^2 \left( \int_{\Gamma(\eta)} |\hat{q}(\xi)|^2 d\sigma(\xi) \int_{\Gamma(\eta)} M \hat{q}(\eta - 2\xi')^2 d\sigma(\xi') \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.3.28)$$

Por la estimación (3.3.28) y cambiando el orden de integración en  $\xi$  y  $\eta$  por el lema B.2, obtenemos

$$\begin{aligned} \|PI_\infty(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}^2 &\leq C \|q\|_{L^2}^4 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\hat{q}(\xi)|^2}{|\xi|} \int_{\Lambda(\xi) \cap B(0,10)^c} |\eta|^{2\beta-3} \\ &\quad \times \int_{\Gamma(\eta)} M \hat{q}(\eta - 2\xi')^2 d\sigma(\xi') d\sigma(\eta) d\xi \end{aligned}$$

$$\leq C \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}^2 \|q\|_{L^2}^4 \begin{cases} \|q\|_{\dot{W}^{\beta-1,2}}^2, & \text{si } -\frac{1}{2} < \beta < \frac{5}{2}, \\ \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2},2}}^2, & \text{si } -1 < \beta < 2, \end{cases}$$

donde la última desigualdad se deduce de la parte (ii) del lema 3.4.2.

Quedan vistas la estimación (3.3.8c) y la afirmación (3.3.8).

□

### Demostración de la afirmación (3.3.7)

Haciendo el cambio de variable  $\phi = \eta - \phi'$ , se tiene

$$\begin{aligned} \widehat{P'_I(q)}(\eta) &= \frac{1}{|\eta|^3} \int \int \int_{I(\eta)} \hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau) \hat{q}(\tau - \phi') \hat{q}(\phi' - \xi) d\sigma(\xi) d\sigma(\tau) d\sigma(\phi') \\ &= \frac{1}{|\eta|^3} \int \int \int_{\tilde{I}(\eta)} \hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau) \hat{q}(\tau + \phi - \eta) \hat{q}(\eta - \phi - \xi) d\sigma(\xi) d\sigma(\tau) d\sigma(\phi), \end{aligned}$$

donde  $\tilde{I}(\eta) := \{(\xi, \tau, \phi) \in \Gamma(\eta)^3 : (\xi, \tau, \eta - \phi) \in I(\eta)\}$ .

Para  $\eta \in \mathbb{R}^3$  fijo, consideramos la descomposición  $\tilde{I}(\eta) = I_1(\eta) \cup \tilde{I}_1(\eta) \cup I_2(\eta)$ , donde

$$\begin{aligned} I_1(\eta) &:= \left\{ |\phi - \tau| \leq \frac{|\eta|}{400}, |\phi| \leq |\eta - \tau|, |\eta - \tau - \phi| \geq \frac{|\eta|}{100}, |\eta - \xi - \phi| \geq \frac{|\eta|}{100} \right\}, \\ \tilde{I}_1(\eta) &:= \left\{ |\phi - \tau| \leq \frac{|\eta|}{400}, |\phi| \geq |\eta - \tau|, |\eta - \tau - \phi| \geq \frac{|\eta|}{100}, |\eta - \xi - \phi| \geq \frac{|\eta|}{100} \right\}, \\ I_2(\eta) &:= \left\{ |\phi - \tau| \geq \frac{|\eta|}{400}, |\eta - \tau - \phi| \geq \frac{|\eta|}{100}, |\eta - \xi - \phi| \geq \frac{|\eta|}{100} \right\}, \end{aligned}$$

donde  $(\xi, \tau, \phi) \in \Gamma(\eta)^3$ . Denotamos por  $\widehat{P_{I_1}(q)}(\eta)$ ,  $\widehat{P_{\tilde{I}_1}(q)}(\eta)$ ,  $\widehat{P_{I_2}(q)}(\eta)$  las expresiones análogas a (3.3.10)-(3.3.11) para los dominios correspondientes sin multiplicar por  $\chi(\eta)$ . Para todo  $\eta \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ,

$$\left| \widehat{P'_I(q)}(\eta) \right| \leq \widehat{P_{I_1}(q)}(\eta) + \widehat{P_{\tilde{I}_1}(q)}(\eta) + \widehat{P_{I_2}(q)}(\eta),$$

y también

$$\|P'_I(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq \|P_{I_1}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} + \|P_{\tilde{I}_1}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} + \|P_{I_2}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}.$$

Formulamos las siguientes afirmaciones

$$\|P_{I_1}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C \|q\|_{L^2}^3 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2},2}}, \quad (3.3.7a)$$

$$\|P_{\tilde{I}_1}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C \|q\|_{L^2}^3 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2},2}}, \quad (3.3.7b)$$

$$\|P_{I_2}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{L^2}^2 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2},2}}. \quad (3.3.7c)$$

A continuación exponemos las demostraciones de estas estimaciones, de las cuales se deduce la expresión (3.3.7). Para ello el lema 3.4.2, situado en la última sección de este capítulo, desempeña un papel fundamental. Utilizaremos las notaciones de dicho lema.

**Demostración de la estimación (3.3.7a)**

En esta región se cumple  $|\eta - \tau| \geq \frac{|\eta|}{200}$ . Efectivamente:

$$|\eta - \tau| \geq |\eta - \tau - \phi| - |\phi| \geq \frac{|\eta|}{100} - |\eta - \tau| \Rightarrow |\eta - \tau| \geq \frac{|\eta|}{200}.$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwartz como en (3.3.15)-(3.3.16) y estimando para  $\eta \in \mathbb{R}^3$ ,  $\phi' \in \Gamma(\eta)$  fijos como sigue

$$\int_{\Gamma(\eta)} |\hat{q}(\xi)|^2 d\sigma(\xi), \int_{\Gamma(\eta)} |\hat{q}(\eta - \phi' - \xi')|^2 d\sigma(\xi') \leq C \|q\|_{L^2}^2$$

aplicando la parte (1) del lema B.1, se llega a

$$\begin{aligned} \left| \widehat{P_{I_1}(q)}(\eta) \right| &\leq \frac{C}{|\eta|^2} \|q\|_{L^2}^2 \left( \int_{\{\tau \in \Gamma(\eta) : |\eta - \tau| \geq \frac{|\eta|}{200}\}} |\hat{q}(\eta - \tau)|^2 d\sigma(\tau) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left( \int \int_{B(\eta)} |\hat{q}(\tau' + \phi' - \eta)|^2 d\sigma(\tau') d\sigma(\phi') \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

donde

$$B(\eta) := \left\{ (\tau', \phi') \in \Gamma(\eta)^2 : |\tau' - \phi'| \leq \frac{|\eta|}{400}, |\eta - \tau' - \phi'| \geq \frac{|\eta|}{100} \right\}. \quad (3.3.29)$$

Haciendo  $\zeta = \eta - \tau$  y cambiando el orden de integración en  $\zeta$  y  $\eta$  por el lema B.2, tenemos que

$$\begin{aligned} \|P_{I_1}\|_{\dot{W}^{\beta,2}}^2 &\leq C \|q\|_{L^2}^4 \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{q}(\zeta)|^2 \int_{\{\eta \in \Lambda(\zeta) : |\zeta| \geq \frac{|\eta|}{200}\}} \frac{|\eta|}{|\zeta|} |\eta|^{2\beta-4} \\ &\quad \times \int \int_{B(\eta)} |\hat{q}(\tau' + \phi' - \eta)|^2 d\sigma(\tau') d\sigma(\phi') d\sigma(\eta) d\zeta \\ &\leq C \|q\|_{L^2}^4 \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{q}(\zeta)|^2 \int_{\Lambda(\zeta)} |\eta|^{2\beta-4} \\ &\quad \times \int \int_{B(\eta)} |\hat{q}(\tau' + \phi' - \eta)|^2 d\sigma(\xi') d\sigma(\phi') d\sigma(\eta) d\zeta \\ &\leq C \|q\|_{L^2}^6 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2},2}}^2, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se desprende de la parte (i) del lema 3.4.2 para  $k = 1$ . Nótese que  $B(\eta) \subset B_1(\eta)$  de acuerdo con la notación en (3.3.14).

Hemos demostrado la estimación (3.3.7a). □

**Demostración de la estimación (3.3.7b)**

Consideramos la partición  $\tilde{I}_1(\eta) = \tilde{I}_{1,a}(\eta) \cup \tilde{I}_{1,b}(\eta)$ , donde

$$\tilde{I}_{1,a}(\eta) := \left\{ (\xi, \tau, \phi) \in \tilde{I}_1(\eta) : |\eta - \phi| \leq \frac{|\eta|}{200} \right\},$$

$$\tilde{I}_{1,b}(\eta) := \left\{ (\xi, \tau, \phi) \in \tilde{I}_1(\eta) : |\eta - \phi| \geq \frac{|\eta|}{200} \right\},$$

y la notación usada en (3.3.10)-(3.3.11) para  $\widehat{P_{\tilde{I}_{1,l}}(q)}(\eta)$ , con  $l \in \{a, b\}$ .

En la región  $\tilde{I}_{1,a}(\eta)$  se verifica  $|\xi| \geq \frac{|\eta|}{200}$ . En efecto:

$$|\xi| \geq |\eta - \xi - \phi| - |\eta - \phi| \geq \frac{|\eta|}{100} - \frac{|\eta|}{200} = \frac{|\eta|}{200}.$$

Podemos seguir el mismo esquema de la demostración del caso  $II_k(\eta)$  para  $k = 1$ , intercambiando los papeles de los factores  $\hat{q}(\eta - \phi - \xi)$  y  $\hat{q}(\tau + \phi - \eta)$ . Como indicábamos más arriba, nótese que  $B(\eta) \subset B_1(\eta)$ , de acuerdo con la notación en (3.3.14) y que estamos en las condiciones de la parte (i) del lema 3.4.2 para  $k = 1$ . Se tiene

$$\|P_{\tilde{I}_{1,a}}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C \|q\|_{L^2}^3 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2},2}}.$$

En la región  $\tilde{I}_{1,b}(\eta)$  se cumple  $|\eta - \tau| \geq \frac{|\eta|}{400}$ . En efecto:

$$|\eta - \tau| \geq |\eta - \phi| - |\phi - \tau| \geq \frac{|\eta|}{200} - \frac{|\eta|}{400} = \frac{|\eta|}{400}.$$

Por tanto, la prueba para el caso  $I_1(\eta)$  es válida en éste, deduciéndose

$$\|P_{\tilde{I}_{1,b}}\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C \|q\|_{L^2}^3 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2},2}}.$$

Queda vista la estimación (3.3.7b)

□

### Demostración de la estimación (3.3.7c)

Sea  $\eta \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . En el término  $\widehat{P_{I_2}(q)}(\eta)$  las ocurrencias de  $\hat{q}$  tienen más interacción entre sí, de manera que sólo podremos acotar por el operador maximal una sola ocurrencia de  $\hat{q}$  (aplicando la parte (1) del lema B.1). Consideramos una familia de puntos de la esfera unitaria  $S^2 \setminus \{\theta_j : 1 \leq j \leq \mathcal{N}\}$  con  $\mathcal{N}$  suficientemente grande para obtener un recubrimiento de la esfera  $\Gamma(\eta)$  formado por  $\mathcal{N}$  casquetes  $J_j(\eta)$  de centro  $\Omega_j(\eta)$  y radio  $\kappa|\eta|$ , para cierta constante  $\kappa > 0$  tal que  $\mathcal{N} \sim \frac{1}{\kappa^2}$ , donde para cada  $j$

$$\Omega_j(\eta) = \frac{\eta}{2} + \frac{|\eta|}{2} \theta_j, \quad (3.3.30)$$

cumplíendose

$$\Gamma(\eta) = \bigcup_{j=1}^{\mathcal{N}} J_j(\eta), \quad \widehat{P_{I_2}(q)}(\eta) \leq \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \widehat{P_{J_j}(q)}(\eta),$$

donde

$$\widehat{P_{J_j}(q)}(\eta) := \frac{1}{|\eta|^3} \int_{J_j(\eta)} \int_{X_\eta(\tau)} \int_{Y_\eta(\phi)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau) \hat{q}(\tau + \phi - \eta)|$$

$$\times |\hat{q}(\eta - \phi - \xi)| d\sigma(\xi) d\sigma(\phi) d\sigma(\tau) \chi(\eta),$$

y

$$X_\eta(\tau) := \{\phi \in \Gamma(\eta) : |\phi - \tau| \geq \frac{|\eta|}{400}, |\eta - \phi - \tau| \geq \frac{|\eta|}{100}\}, \quad (3.3.31)$$

$$Y_\eta(\phi) := \{\xi \in \Gamma(\eta) : |\eta - \phi - \xi| \geq \frac{|\eta|}{100}\}. \quad (3.3.32)$$

Fijamos  $j \in \{1, \dots, \mathcal{N}\}$ . En este apartado tomaremos una referencia ortonormal de  $\mathbb{R}^3$   $\{e_1, e_2, e_3\}$  tal que  $e_1 = \theta_j$ , de acuerdo con la notación en (3.3.30). En la expresión integral para  $\widehat{P_{J_j}(q)}(\eta)$ , aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwartz como en (3.3.12)-(3.3.13). Para cada  $j, \eta$  fijos, por el teorema de Fubini, se cumple

$$\begin{aligned} & \int_{J_j(\eta)} \int_{X_\eta(\tau)} \int_{Y_\eta(\phi)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\tau + \phi - \eta)|^2 d\sigma(\xi) d\sigma(\phi) d\sigma(\tau) \\ & \leq \int_{\Gamma(\eta)} |\hat{q}(\xi)|^2 \int_{J_j(\eta)} \int_{X_\eta(\tau)} |\hat{q}(\tau + \phi - \eta)|^2 d\sigma(\phi) d\sigma(\tau) d\sigma(\xi). \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} & \int_{J_j(\eta)} \int_{X_\eta(\tau')} \int_{Y_\eta(\phi')} |\hat{q}(\eta - \tau') \hat{q}(\eta - \phi' - \xi')|^2 d\sigma(\xi') d\sigma(\phi') d\sigma(\tau') \\ & \leq \int_{\Gamma(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \int_{Y_\eta(\phi')} |\hat{q}(\eta - \tau') \hat{q}(\eta - \phi' - \xi')|^2 d\sigma(\xi') d\sigma(\phi') d\sigma(\tau') \\ & = \int_{\Gamma(\eta)} |\hat{q}(\eta - \tau')|^2 d\sigma(\tau') \int_{\Gamma(\eta)} \int_{Y_\eta(\phi')} |\hat{q}(\eta - \phi' - \xi')|^2 d\sigma(\xi') d\sigma(\phi') \\ & \leq C \|q\|_{L^2}^2 \int_{\Gamma(\eta)} \int_{Y_\eta(\phi')} |\hat{q}(\eta - \phi' - \xi')|^2 d\sigma(\xi') d\sigma(\phi'), \end{aligned}$$

acotando por el operador maximal en virtud del lema B.1 en la última desigualdad. Por todo ello y cambiando el orden de integración en  $\xi$  y  $\eta$  por el lema B.2, podemos escribir

$$\begin{aligned} \|P_{J_j}(q)\|_{W^{\beta,2}}^2 & \leq C \|q\|_{L^2}^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\eta|^{2\beta-6} \int_{\Gamma(\eta)} |\hat{q}(\xi)|^2 \int_{J_j(\eta)} \int_{X_\eta(\tau)} |\hat{q}(\tau + \phi - \eta)|^2 d\sigma(\phi) d\sigma(\tau) \\ & \quad \times \int_{\Gamma(\eta)} \int_{Y_\eta(\phi')} |\hat{q}(\eta - \phi' - \xi')|^2 d\sigma(\xi') d\sigma(\phi') d\sigma(\xi) d\eta \\ & = C \|q\|_{L^2}^2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\hat{q}(\xi)|^2}{|\xi|} \int_{\Lambda(\xi)} |\eta|^{2\beta-5} \int_{J_j(\eta)} \int_{X_\eta(\tau)} |\hat{q}(\tau + \phi - \eta)|^2 d\sigma(\phi) d\sigma(\tau) \\ & \quad \times \int_{\Gamma(\eta)} \int_{Y_\eta(\phi')} |\hat{q}(\eta - \phi' - \xi')|^2 d\sigma(\xi') d\sigma(\phi') d\sigma(\eta) d\xi. \end{aligned}$$

Fijamos  $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  y denotamos

$$\begin{aligned} G_j(\xi) & := \int_{\Lambda(\xi)} |\eta|^{2\beta-5} \int_{J_j(\eta)} \int_{X_\eta(\tau)} |\hat{q}(\tau + \phi - \eta)|^2 d\sigma(\phi) d\sigma(\tau) \\ & \quad \times \int_{\Gamma(\eta)} \int_{Y_\eta(\phi')} |\hat{q}(\eta - \phi' - \xi')|^2 d\sigma(\xi') d\sigma(\phi') d\sigma(\eta). \end{aligned}$$

Expresamos  $\eta \in \Lambda(\xi)$  en coordenadas polares en el plano como  $\eta = \xi + sz$ , con  $s \geq 0$  y  $z \in \{\xi\}^\perp$ ,  $|z| = 1$ . Se verifica  $d\sigma(\eta) = s ds d\sigma(z)$ . Sea  $h(s) := |\eta| = (|\xi|^2 + s^2)^{\frac{1}{2}}$ . Nos queda

$$\begin{aligned} G_j(\xi) &= \int_{S^1} \int_0^\infty h(s)^{2\beta-5} \int_{J_j(s,z)} \int_{X_{s,z}(\tau)} |\hat{q}(\tau + \phi - (\xi + sz))|^2 d\sigma(\phi) d\sigma(\tau) \\ &\quad \times \int_{\Gamma(\xi+sz)} \int_{Y_{s,z}(\phi')} |\hat{q}(\xi + sz - \phi' - \xi')|^2 d\sigma(\xi') d\sigma(\phi') s ds d\sigma(z) \\ &\leq C \|q\|_{L^2}^2 \int_{S^1} \int_0^\infty h(s)^{2\beta-4} \end{aligned} \quad (3.3.33)$$

$$\times \int_{\Gamma(\xi+sz)} \int_{Y_{s,z}(\phi')} |\hat{q}(\xi + sz - \phi' - \xi')|^2 d\sigma(\xi') d\sigma(\phi') s ds d\sigma(z), \quad (3.3.34)$$

donde la última desigualdad se desprende de la siguiente

**Afirmación 3.3.1.** Sean  $1 \leq j \leq \mathcal{N}$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^3$ ,  $z \in \{\xi\}^\perp$ , con  $|z| = 1$ , y  $s \geq 0$ . Entonces

$$\begin{aligned} &\int_{J_j(s,z)} \int_{X_{s,z}(\tau)} |\hat{q}(\tau + \phi - (\xi + sz))|^2 d\sigma(\phi) d\sigma(\tau) \\ &\leq C h(s) \|q\|_{L^2}^2, \end{aligned} \quad (3.3.35)$$

donde  $C$  es independiente de  $s, z, \xi$ .

### Demostración de la afirmación 3.3.1

La variable  $\xi$  está fija a lo largo de esta demostración y para simplificar la notación hemos omitido la dependencia respecto de  $\xi$  en las notaciones  $J_j(s, z)$ ,  $X_{s,z}(\tau)$ ,  $h(s)$ .

Expresamos  $\tau, \phi$  en coordenadas esféricas respecto de la referencia  $\{e_1, e_2, e_3\}$ :

$$\tau = \frac{\xi + sz}{2} + \frac{h(s)}{2} (\sin \psi \cos \delta e_1 + \sin \psi \sin \delta e_2 + \cos \psi e_3), \quad (3.3.36)$$

$$\phi = \frac{\xi + sz}{2} + \frac{h(s)}{2} (\sin \zeta \cos \gamma e_1 + \sin \zeta \sin \gamma e_2 + \cos \zeta e_3), \quad (3.3.37)$$

con  $\psi, \zeta \in [0, \pi]$ ,  $\delta, \gamma \in (-\pi, \pi]$ . Se verifica

$$d\sigma(\phi) d\sigma(\tau) = h(s)^4 \sin \psi \sin \zeta d\gamma d\zeta d\delta d\psi.$$

Nótese que si  $\tau \in J_j(s, z)$  entonces  $\tau$  pertenece al “cuadrado curvilíneo” en la esfera  $\Gamma(\eta)$  que contiene al casquete  $J_j(s, z)$  dado por

$$(\psi, \delta) \in \left[ \frac{\pi}{2} - \varepsilon_0, \frac{\pi}{2} + \varepsilon_0 \right] \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0],$$

donde  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\kappa)$  cumple  $\sin \varepsilon_0 = 2\kappa$ . Para cada  $\zeta \in [0, \pi]$  y  $\psi, \delta$ , definimos

$$\begin{aligned} X^*(\zeta, \psi, \delta) &:= \{\gamma \in (-\pi, \pi] : \phi \in X_{s,z}(\tau)\} \\ &= \left\{ \gamma \in (-\pi, \pi] : -\left(1 - \frac{1}{5000}\right) \leq \sin \psi \cos \delta \sin \zeta \cos \gamma \right\} \end{aligned}$$

$$+ \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \zeta \operatorname{sen} \gamma + \cos \psi \cos \zeta \leq 1 - \frac{1}{80000} \Big\}.$$

La expresión integral (3.3.35) está acotada por

$$C \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon_0}^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon_0} \int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} \int_0^\pi \int_{X^*(\zeta, \psi, \delta)} h(s)^4 \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \zeta |\hat{q}(A(j, s, \psi, \delta, \zeta, \gamma))|^2 d\gamma d\zeta d\delta d\psi,$$

donde

$$\begin{aligned} A(j, s, \psi, \delta, \zeta, \gamma) &:= \tau + \phi - \eta = \frac{h(s)}{2} ((\operatorname{sen} \psi \cos \delta + \operatorname{sen} \zeta \cos \gamma) e_1 \\ &\quad + (\operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \delta + \operatorname{sen} \zeta \operatorname{sen} \gamma) e_2 + (\cos \psi + \cos \zeta) e_3). \end{aligned}$$

Pc. razones técnicas dividimos el dominio correspondiente para los ángulos  $\psi, \delta, \zeta, \gamma$  en dos partes  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &:= \{(\psi, \delta, \zeta, \gamma) : |\cos(\psi - \zeta)| < 1 - 10^{-9}\}, \\ \mathcal{A}_2 &:= \{(\psi, \delta, \zeta, \gamma) : |\cos(\psi - \zeta)| \geq 1 - 10^{-9}\}, \end{aligned}$$

donde  $(\psi, \delta, \zeta) \in [\frac{\pi}{2} - \varepsilon_0, \frac{\pi}{2} + \varepsilon_0] \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \times [0, \pi]$ , y para cada  $\psi, \delta, \zeta$  fijos  $\gamma$  pertenece al conjunto  $X^*(\zeta, \psi, \delta)$ . De este modo, (3.3.35) queda acotado por

$$C \left( \int \int \int \int_{\mathcal{A}_1} + \int \int \int \int_{\mathcal{A}_2} \right) h(s)^4 \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \zeta |\hat{q}(A(j, s, \psi, \delta, \zeta, \gamma))|^2 d\gamma d\zeta d\delta d\psi.$$

**Nota.** Elegimos  $\mathcal{N}$  suficientemente grande para tomar el radio del casquete  $J_j(\eta)$  con  $\kappa < \frac{10^{-5}}{2}$ .

*Estimación en el dominio  $\mathcal{A}_1$ .*

Si  $\kappa < \frac{10^{-5}}{2}$  entonces  $|\cos \psi| \leq 2\kappa < 10^{-5}$ . Se tiene

$$\begin{aligned} 1 - 10^{-9} &> |\cos(\psi - \zeta)| \geq |\operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \zeta| - |\cos \psi \cos \zeta| \\ &\geq \sqrt{1 - 10^{-10}} \operatorname{sen} \zeta - 10^{-5} |\cos \zeta| \\ &= \sqrt{1 - 10^{-10}} \sqrt{1 - \cos^2 \zeta} - 10^{-5} |\cos \zeta|, \end{aligned}$$

y

$$\cos^2 \zeta + 2 \cdot 10^{-5} (1 - 10^{-9}) |\cos \zeta| + (1 - 10^{-9})^2 - (1 - 10^{-10}) > 0,$$

donde el discriminante del correspondiente polinomio cuadrático en  $|\cos \zeta|$  es

$$\Delta = 4 \cdot 10^{-9} (1 - 10^{-10}) (2 - 10^{-9}) > 0,$$

de manera que  $\zeta$  satisface

$$|\cos \zeta| > -(1 - 10^{-9}) 10^{-5} + \sqrt{10^{-9} (1 - 10^{-10}) (2 - 10^{-9})} > 3 \cdot 10^{-5}.$$



Teniendo en cuenta que  $|\cos \psi| < 10^{-5}$ ,  $|\cos \zeta| > 3 \cdot 10^{-5}$ , se cumple

$$|\sin \zeta \cos \psi \cos(\delta - \gamma) - \sin \psi \cos \zeta| \quad (3.3.38)$$

$$\geq |\sin \psi \cos \zeta| - |\sin \zeta \cos \psi \cos(\delta - \gamma)| \geq |\sin \psi \cos \zeta| - |\sin \zeta \cos \psi| \quad (3.3.39)$$

$$\geq 3 \cdot 10^{-5} \sqrt{1 - 10^{-10}} - 10^{-5} \sqrt{1 - 9 \cdot 10^{-10}} \sim 2 \cdot 10^{-5}. \quad (3.3.40)$$

Para  $j, s, \delta$  fijos hacemos el cambio de variables  $(\zeta, \gamma, \psi) \rightarrow \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , dado por

$$\lambda = \frac{h(s)}{2} ((\sin \psi \cos \delta + \sin \zeta \cos \gamma) e_1 \quad (3.3.41)$$

$$+ (\sin \psi \sin \delta + \sin \zeta \sin \gamma) e_2 + (\cos \psi + \cos \zeta) e_3). \quad (3.3.42)$$

Se verifica

$$\left| \frac{\partial(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial(\zeta, \gamma, \psi)} \right| = \frac{h(s)^3 \sin \zeta |\sin \zeta \cos \psi \cos(\delta - \gamma) - \sin \psi \cos \zeta|}{8}.$$

En virtud de los teoremas de Fubini y Toneli y las estimaciones (3.3.38), (3.3.39), (3.3.40), tenemos

$$\begin{aligned} & \int \int \int \int_{\mathcal{A}_1} h(s)^4 \sin \psi \sin \zeta |\hat{q}(A(j, s, \psi, \delta, \zeta, \gamma))|^2 d\gamma d\zeta d\delta d\psi \\ & \leq C \int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} h(s) |\hat{q}(\lambda)|^2 d\lambda d\delta \\ & = C h(s) \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{q}(\lambda)|^2 d\lambda. \end{aligned}$$

*Estimación en el dominio  $\mathcal{A}_2$ .*

Ahora aplicamos el cambio de variables  $(\psi, \delta, \gamma) \rightarrow \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , dado por (3.3.41)-(3.3.42) para cada  $j, s, \zeta$  fijos, cumpliéndose

$$\left| \frac{\partial(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial(\psi, \delta, \gamma)} \right| = \frac{h(s)^3 \sin^2 \psi \sin \zeta |\sin(\delta - \gamma)|}{8}.$$

Como consecuencia de que  $|\psi - \frac{\pi}{2}| \leq \varepsilon_0$  se verifica que  $|\cos \psi| \leq 2\kappa$ . En particular el seno de  $\psi$  está acotado inferiormente.

Por otro lado, ya que  $\gamma \in X^*(\zeta, \psi, \delta)$  sabemos que la expresión

$$\begin{aligned} & \sin \psi \cos \delta \sin \zeta \cos \gamma + \sin \psi \sin \delta \sin \zeta \sin \gamma + \cos \psi \cos \zeta \\ & = \cos(\psi - \zeta) \cos(\delta - \gamma) + \cos \psi \cos \zeta (1 - \cos(\delta - \gamma)) \end{aligned}$$

toma valores entre  $-(1 - 1/5000)$  y  $1 - 1/80000$ . Tenemos

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{80000} & \geq |\cos(\psi - \zeta) \cos(\delta - \gamma) + \cos \psi \cos \zeta (1 - \cos(\delta - \gamma))| \\ & \geq |\cos(\psi - \zeta) \cos(\delta - \gamma)| - |\cos \psi \cos \zeta| (1 - \cos(\delta - \gamma)) \end{aligned}$$

$$\geq (1 - 10^{-9})|\cos(\delta - \gamma)| - 2\kappa|\cos\zeta|(1 - \cos(\delta - \gamma)).$$

Si  $\cos(\delta - \gamma) \geq 0$  nos queda

$$1 - \frac{1}{80000} \geq (1 - 10^{-9} + 2\kappa|\cos\zeta|)\cos(\delta - \gamma) - 2\kappa|\cos\zeta|,$$

y, por tanto,

$$\cos(\delta - \gamma) \leq \frac{1 - 1/80000 + 2\kappa|\cos\zeta|}{1 - 10^{-9} + 2\kappa|\cos\zeta|} \leq \frac{1 - 1/80000 + 2\kappa}{1 - 10^{-9}}.$$

En cambio, si  $\cos(\delta - \gamma) < 0$  se cumple

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{80000} &\geq -(1 - 10^{-9} - 2\kappa|\cos\zeta|)\cos(\delta - \gamma) - 2\kappa|\cos\zeta| \\ &\geq -(1 - 10^{-9} - 2\kappa)\cos(\delta - \gamma) - 2\kappa|\cos\zeta|. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $\kappa$  es menor que  $\frac{1-10^{-9}}{2}$  (y de hecho, mucho menor suponiendo  $\kappa < \frac{10^{-5}}{2}$ ), se tiene

$$\cos(\delta - \gamma) \geq -\frac{1 - 1/80000 + 2\kappa|\cos\zeta|}{1 - 10^{-9} - 2\kappa} \geq -\frac{1 - 1/80000 + 2\kappa}{1 - 10^{-9} - 2\kappa}.$$

Deducimos la estimación

$$|\cos(\delta - \gamma)| \leq \frac{1 - 1/80000 + 2\kappa}{1 - 10^{-9} - 2\kappa},$$

de la que se desprende que  $|\sin(\delta - \gamma)|$  está acotado inferiormente por una constante estrictamente positiva que únicamente depende de  $\kappa$ .

Por todo ello junto a los teoremas de Fubini y Tonelli, se verifica

$$\begin{aligned} &\int \int \int \int_{\mathcal{A}_2} h(s)^4 \sin\psi \sin\zeta |\hat{q}(A(j, s, \psi, \delta, \zeta, \gamma))|^2 d\gamma d\zeta d\delta d\psi \\ &\leq C \int_0^\pi \int_{\mathbb{R}^3} h(s) |\hat{q}(\lambda)|^2 d\lambda d\zeta \\ &= C h(s) \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{q}(\lambda)|^2 d\lambda. \end{aligned}$$

Hemos demostrado la afirmación 3.3.1. □

En (3.3.34) cambiamos las variables  $\xi', \phi'$  a coordenadas esféricas como hicimos en (3.3.36), (3.3.37):

$$\begin{aligned} \xi' &= \frac{\xi + sz}{2} + \frac{h(s)}{2} (\sin\Theta \cos\theta e_1 + \sin\Theta \sin\theta e_2 + \cos\Theta e_3), \\ \phi' &= \frac{\xi + sz}{2} + \frac{h(s)}{2} (\sin\zeta' \cos\gamma' e_1 + \sin\zeta' \sin\gamma' e_2 + \cos\zeta' e_3), \end{aligned}$$

donde  $\Theta, \zeta' \in [0, \pi]$ ,  $\theta, \gamma' \in (-\pi, \pi]$ . Se cumple

$$d\sigma(\xi')d\sigma(\phi') = h(s)^4 \sin \Theta \sin \zeta' d\theta d\Theta d\gamma' d\zeta'.$$

Para cada  $\Theta \in [0, \pi]$  y  $\zeta', \gamma'$ , definimos

$$\begin{aligned} Y^*(\Theta, \zeta', \gamma') &:= \{\theta \in (-\pi, \pi] : \xi' \in Y_{s,z}(\phi')\} \\ &= \{\theta \in (-\pi, \pi] : \sin \Theta \cos \theta \sin \zeta' \cos \gamma' \\ &\quad + \sin \Theta \sin \theta \sin \zeta' \sin \gamma' + \cos \Theta \cos \zeta' \geq -(1 - 1/5000)\}. \end{aligned}$$

Retomando la expresión (3.3.33)-(3.3.34), ésta está acotada por

$$\begin{aligned} &C \|q\|_{L^2}^2 \int_{S^1} \int_0^\infty h(s)^{2\beta} \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi \int_0^\pi \int_{Y^*(\Theta, \zeta', \gamma')} \sin \Theta \sin \zeta' \\ &\quad \times |\hat{q}(B(j, s, \Theta, \theta, \zeta', \gamma'))|^2 d\theta d\Theta d\gamma' d\zeta' s ds d\sigma(z) \\ &= C \|q\|_{L^2}^2 \int_0^\infty h(s)^{2\beta} \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi \int_0^\pi \int_{Y^*(\Theta, \zeta', \gamma')} \sin \Theta \sin \zeta' \\ &\quad \times |\hat{q}(B(j, s, \Theta, \theta, \zeta', \gamma'))|^2 d\theta d\Theta d\gamma' d\zeta' s ds, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} B(j, s, \Theta, \theta, \zeta', \gamma') &:= \eta - \phi' - \xi' = \frac{-h(s)}{2} ((\sin \Theta \cos \theta + \sin \zeta' \cos \gamma') e_1 \\ &\quad + (\sin \Theta \sin \theta + \sin \zeta' \sin \gamma') e_2 + (\cos \Theta + \cos \zeta') e_3). \end{aligned}$$

A continuación para  $j, \zeta', \gamma'$  fijos tomamos el cambio de variables  $(s, \Theta, \theta) \rightarrow \mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$  dado por

$$\mu = \eta - \phi' - \xi' = B(j, s, \Theta, \theta, \zeta', \gamma').$$

El Jacobiano de esta transformación viene dado por

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial(\mu_1, \mu_2, \mu_3)}{\partial(s, \Theta, \theta)} \right| &= \frac{s h(s) \sin \Theta}{8} (1 + \sin \Theta \sin \zeta' \cos \theta \cos \gamma' \\ &\quad + \sin \Theta \sin \zeta' \sin \theta \sin \gamma' + \cos \Theta \cos \zeta'). \end{aligned}$$

Obsérvese que dicho cambio de variables conlleva una expresión de  $s$  como función de  $\mu$  que va a depender de los parámetros  $j, \zeta', \gamma'$ . Por tanto, la función  $h$  presenta la misma dependencia paramétrica

$$h(s) = h(\mu, j, \zeta', \gamma')$$

(recordemos que omitimos la dependencia de  $\xi$ ). Sin embargo, en el dominio de integración donde estamos las cantidades  $h(s)$  y  $|\mu|$  son comparables. De hecho, para  $\xi' \in Y_\eta(\phi')$  se tiene

$$\frac{|\eta|}{100} \leq |\eta - \phi' - \xi'| \leq |\eta|.$$

Este hecho se formula en términos de las variables angulares y de  $s$  de manera obvia teniendo presente que

$$|B(j, s, \Theta, \theta, \zeta', \gamma')| = |\eta - \phi' - \xi'| = \frac{h(s)}{2} (1 + \sin \Theta \sin \zeta' \cos \theta \cos \gamma' + \sin \Theta \sin \zeta' \sin \theta \sin \gamma' + \cos \Theta \cos \zeta')^{\frac{1}{2}},$$

y recordando la condición

$$\sin \Theta \cos \theta \sin \zeta' \cos \gamma' + \sin \Theta \sin \theta \sin \zeta' \sin \gamma' + \cos \Theta \cos \zeta' \geq -(1 - 1/5000).$$

Podemos concluir que

$$\begin{aligned} G_j(\xi) &\leq C \|q\|_{L^2}^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}^3} |\mu|^{2\beta-1} |\hat{q}(\mu)|^2 d\mu d\gamma' d\zeta' \\ &= C \|q\|_{L^2}^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\mu|^{2\beta-1} |\hat{q}(\mu)|^2 d\mu, \end{aligned}$$

y por tanto, hemos probado las siguientes acotaciones

$$\begin{aligned} \|P_{J_j}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} &\leq C \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{L^2}^2 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2},2}}, \text{ y} \\ \|P_{I_2}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} &\leq C \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{L^2}^2 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2},2}}. \end{aligned}$$

Esto termina la demostración de la estimación (3.3.7c), así como la afirmación (3.3.7).  $\square$

### Demostración de la afirmación (3.3.9)

Este caso se inspira totalmente en la metodología empleada para controlar la parte  $Q'_{II}(q)$  del término cúbico.

Empezamos por observar que  $IV(\eta) \subset IV_{<}(\eta) \cup IV_{>}(\eta)$ , donde

$$\begin{aligned} IV_{<}(\eta) &:= \left\{ (\xi, \tau, \phi) \in IV(\eta) : |\xi|, |\tau|, |\phi| \leq \left( \frac{1}{50} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) |\eta| \right\}, \\ IV_{>}(\eta) &:= \left\{ (\xi, \tau, \phi) \in IV(\eta) : |\eta - \xi|, |\eta - \tau|, |\eta - \phi| \leq \left( \frac{1}{50} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) |\eta| \right\}. \end{aligned}$$

De hecho, si  $|\xi| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} |\eta|$  entonces

$$|\phi| \leq |\phi - \xi| + |\xi| \leq \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{100} \right) |\eta|, \quad |\tau| \leq |\tau - \phi| + |\phi| \leq \left( \frac{2}{100} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) |\eta|,$$

y si  $|\xi| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} |\eta|$  entonces  $|\eta - \xi| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} |\eta|$ , y se tiene

$$|\eta - \phi| \leq |\eta - \xi| + |\xi - \phi| \leq \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{100} \right) |\eta|, \quad |\eta - \tau| \leq |\eta - \phi| + |\phi - \tau| \leq \left( \frac{2}{100} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) |\eta|.$$

Escribimos

$$\mathcal{F}(P_{IV_<}(q))(\eta) := \frac{1}{|\eta|^3} \int \int \int_{IV_<(\eta)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau)| \quad (3.3.43)$$

$$\times |\hat{q}(\tau - \phi) \hat{q}(\phi - \xi)| d\sigma(\xi) d\sigma(\tau) d\sigma(\phi), \quad (3.3.44)$$

y la expresión análoga para  $\widehat{P_{IV_>}}(q)(\eta)$ . Haciendo los cambios de variable  $\xi = \eta - \xi'$ ,  $\tau = \eta - \tau'$ ,  $\phi = \eta - \phi'$  a la integral

$$\int \int \int_{IV_>(\eta)} |\hat{q}(\xi') \hat{q}(\eta - \tau') \hat{q}(\tau' - \phi') \hat{q}(\phi' - \xi')| d\sigma(\xi') d\sigma(\tau') d\sigma(\phi'),$$

se llega a que  $\widehat{P_{IV_>}}(q)(\eta) = \widehat{P_{IV_<}}(q)(\eta)$ , y por tanto,

$$|\widehat{P_{IV}}(q)(\eta)| \leq 2 \widehat{P_{IV_<}}(q)(\eta).$$

Consideramos la descomposición  $IV_<(\eta) \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} (IV_k(\eta) \cup \widetilde{IV}_k(\eta))$ , siendo

$$IV_k(\eta) := \{(\xi, \tau, \phi) \in IV_<(\eta) : |\phi| \leq |\xi| \sim 2^{-k}|\eta|\},$$

$$\widetilde{IV}_k(\eta) := \{(\xi, \tau, \phi) \in IV_<(\eta) : |\xi| \leq |\phi| \sim 2^{-k}|\eta|\}.$$

Denotamos por  $\widehat{P_{IV_k}}(q)(\eta)$ ,  $\widehat{P_{\widetilde{IV}_k}}(q)(\eta)$  las mismas expresiones que en (3.3.43)-(3.3.44) para los dominios  $IV_k(\eta)$ ,  $\widetilde{IV}_k(\eta)$ . Se verifica

$$\|P_{IV}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \|P_{IV_k}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} + \|P_{\widetilde{IV}_k}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \right).$$

Vamos a probar las estimaciones

$$\|P_{IV_k}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C 2^{-\varepsilon k} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{\dot{W}^{-\varepsilon,2}} \|q\|_{L^2} \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2}+\varepsilon,2}}, \quad (3.3.9a)$$

$$\|P_{\widetilde{IV}_k}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C 2^{-\varepsilon k} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{\dot{W}^{-\varepsilon,2}} \|q\|_{L^2} \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2}+\varepsilon,2}} \quad (3.3.9b)$$

$$+ C 2^{-\varepsilon k} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2}-\varepsilon,2}} \|q\|_{L^2}^2 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2}+\varepsilon,2}}, \quad (3.3.9c)$$

donde  $\varepsilon > 0$ .

#### **Demostración de la estimación (3.3.9a)**

Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned} \widehat{P_{IV_k}}(q)(\eta) &\leq \frac{1}{|\eta|^3} \left( \int \int \int_{IV_k(\eta)} |\hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \tau)|^2 d\sigma(\xi) d\sigma(\tau) d\sigma(\phi) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left( \int \int \int_{IV_k(\eta)} |\hat{q}(\tau' - \phi') \hat{q}(\phi' - \xi')|^2 d\sigma(\xi') d\sigma(\tau') d\sigma(\phi') \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Para  $\eta \in \mathbb{R}^3$ ,  $\phi' \in \Gamma(\eta)$  fijos hacemos

$$\int_{\Gamma(\eta)} |\hat{q}(\tau' - \phi')|^2 d\sigma(\tau') \leq C \|q\|_{L^2}^2,$$

acotando por el operador maximal en virtud del lema B.1, como hemos hecho varias veces.

Sabiendo además que  $\sigma(\Gamma(\eta)) = \pi |\eta|^2$ , nos queda

$$\|P_{IV_k}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}^2 \leq C \|q\|_{L^2}^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\eta|^{2\beta-4} \int_{A_k(\eta)} |\hat{q}(\xi)|^2 \int_{\mathcal{B}_\xi(\eta)} |\hat{q}(\eta - \tau)|^2 d\sigma(\tau) d\sigma(\xi) \quad (3.3.45)$$

$$\times \int \int_{\mathcal{C}_k(\eta)} |\hat{q}(\phi' - \xi')|^2 d\sigma(\xi') d\sigma(\phi') d\eta \quad (3.3.46)$$

$$\leq C \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}^2 \|q\|_{L^2}^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\eta|^{2\beta-4} \int_{A_k(\eta)} |\hat{q}(\xi)|^2 \quad (3.3.47)$$

$$\times 2^{-k} |\eta|^2 \int_{\mathcal{B}_\xi(\eta)} |\hat{q}(\eta - \tau)|^2 d\sigma(\tau) d\sigma(\xi) d\eta \quad (3.3.48)$$

$$\leq C 2^{-2k\varepsilon} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}^2 \|q\|_{L^2}^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{q}(\xi)|^2 \int_{\Lambda^*(\xi)} |\eta|^{2\beta-2} \quad (3.3.49)$$

$$\times \frac{|\eta|^{2\varepsilon}}{|\xi|^{2\varepsilon}} \int_{\mathcal{B}_\xi(\eta)} |\hat{q}(\eta - \tau)|^2 d\sigma(\tau) d\sigma(\eta) d\xi \quad (3.3.50)$$

$$\leq C 2^{-2k\varepsilon} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}^2 \|q\|_{\dot{W}^{-\varepsilon,2}}^2 \|q\|_{L^2}^2 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2}+\varepsilon,2}}^2 \quad (3.3.51)$$

donde

$$\begin{aligned} A_k(\eta) &:= \left\{ \xi \in \Gamma(\eta) : |\xi| \sim 2^{-k} |\eta|, |\xi| \leq \left( \frac{1}{50} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) |\eta| \right\}, \\ \mathcal{B}_\xi(\eta) &:= \left\{ \tau \in \Gamma(\eta) : |\xi - \tau| \leq \frac{|\eta|}{50}, |\tau| \leq \left( \frac{1}{50} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) |\eta| \right\}, \\ \mathcal{C}_k(\eta) &:= \left\{ (\xi', \phi') \in \Gamma(\eta)^2 : |\phi' - \xi'| \leq \frac{|\eta|}{100}, |\phi'| \leq |\xi'| \sim 2^{-k} |\eta| \right\}, \\ \Lambda^*(\xi) &:= \left\{ \eta \in \Lambda(\xi) : |\xi| \leq \left( \frac{1}{50} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) |\eta| \right\}, \end{aligned} \quad (3.3.52)$$

y la parte (i) del lema 3.4.1 permite acotar (3.3.45)-(3.3.46) por (3.3.47)-(3.3.48). Pasamos de (3.3.47)-(3.3.48) a (3.3.49)-(3.3.50) por la propiedad  $|\xi| \sim 2^{-k} |\eta|$ , y cambiando el orden de integración en  $\xi$  y  $\eta$  por el lema B.2. Finalmente, acotamos (3.3.49)-(3.3.50) por (3.3.51) por la parte (iii) del lema 3.4.1.

Hemos probado la estimación (3.3.9a).

□

### Demostración de la estimación (3.3.9b)-(3.3.9c)

Consideramos una división más:  $\widetilde{IV}_k(\eta) = \widetilde{IV}_{k,a}(\eta) \cup \widetilde{IV}_{k,b}(\eta)$ , donde

$$\widetilde{IV}_{k,a}(\eta) := \left\{ (\xi, \tau, \phi) \in \widetilde{IV}_k(\eta) : |\xi| \geq 2^{-k-2} |\eta| \right\},$$

$$\widetilde{IV}_{k,b}(\eta) := \left\{ (\xi, \tau, \phi) \in \widetilde{IV}_k(\eta) : |\xi| \leq 2^{-k-2}|\eta| \right\}.$$

Para  $l \in \{a, b\}$ , empleamos la notación  $P_{\widetilde{IV}_{k,l}}(q)$  para referirnos a la función cuya transformada de Fourier en  $\eta$  viene dada por la expresión integral (3.3.43)-(3.3.44) en el dominio  $\widetilde{IV}_{k,l}(\eta)$ .

En la región  $\widetilde{IV}_{k,a}(\eta)$  se tiene que  $|\xi| \leq |\phi| \leq 2^{-k+1}|\eta|$ , y  $2^{-k-2}|\eta| \leq |\xi| \leq 2^{-k+1}|\eta|$ , luego los pasos de la demostración del caso  $IV_k(\eta)$  nos conducen a

$$\|P_{\widetilde{IV}_{k,a}}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C 2^{-\varepsilon k} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q\|_{\dot{W}^{-\varepsilon,2}} \|q\|_{L^2} \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2}+\varepsilon,2}}. \quad (3.3.53)$$

En el dominio  $\widetilde{IV}_{k,b}(\eta)$  se cumple  $|\xi - \phi| \geq 2^{-k-2}|\eta|$ :

$$|\xi - \phi| \geq |\phi| - |\xi| \geq 2^{-k-1}|\eta| - 2^{-k-2}|\eta| = 2^{-k-2}|\eta|.$$

En este caso, podemos acotar la cantidad  $\|P_{\widetilde{IV}_{k,b}}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}^2$  por una expresión similar a (3.3.45)-(3.3.46) substituyendo  $A_k(\eta)$  por el conjunto

$$\left\{ \xi \in \Gamma(\eta) : |\xi| \leq 2^{-k-2}|\eta|, |\xi| \leq \left( \frac{1}{50} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) |\eta| \right\}$$

y el dominio  $C_k(\eta)$  por el conjunto

$$\left\{ (\xi', \phi') \in \Gamma(\eta)^2 : 2^{-k-2}|\eta| \leq |\phi' - \xi'| \leq \frac{|\eta|}{100}, |\xi'| \leq |\phi'| \sim 2^{-k}|\eta| \right\}.$$

Por la parte (ii) del lema 3.4.1, cambiando el orden de integración en  $\xi$  y  $\eta$  por el lema B.2, multiplicando y dividiendo por  $\frac{|\eta|^{2\varepsilon}}{|\xi|^{2\varepsilon}}$  y aplicando que  $\frac{|\xi|^{2\varepsilon}}{|\eta|^{2\varepsilon}} \leq 2^{2\varepsilon(-k-2)}$ , y finalmente por la parte (iii) del lema 3.4.1 se obtiene

$$\|P_{\widetilde{IV}_{k,b}}(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C 2^{-\varepsilon k} \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2}-\varepsilon,2}} \|q\|_{L^2}^2 \|q\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2}+\varepsilon,2}}. \quad (3.3.54)$$

Las expresiones (3.3.53) y (3.3.54) nos conducen a la estimación (3.3.9b)-(3.3.9c).

Esto termina la demostración de la afirmación (3.3.9) y, por consiguiente, la acotación del término esférico  $P'(q)$ .

□

### 3.4. Resultados clave en 3d

En este apartado enunciamos y demostramos dos lemas clave para el control de la parte esférica correspondiente a los términos de dispersión triple  $Q_3(q)$  y cuádruple  $Q_4(q)$ . Concretamente, el lema 3.4.1 es esencial para probar las afirmaciones (3.2.4) y (3.3.9) y el lema 3.4.2 desempeña un papel fundamental en las demostraciones de las afirmaciones (3.3.7) y (3.3.8).

**Lema 3.4.1.** Sean  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $k \geq 1$ . Denotamos

$$F_k^1(\eta) := \int \int_{\mathcal{A}_k(\eta)} |\hat{q}(\tau' - \xi')|^2 d\sigma(\xi') d\sigma(\tau'), \quad (3.4.1)$$

$$F_k^2(\eta) := \int \int_{\mathcal{B}_k(\eta)} |\hat{q}(\tau' - \xi')|^2 d\sigma(\xi') d\sigma(\tau'), \quad (3.4.2)$$

$$F^3(\xi) := \int_{\tilde{L}(\xi)} |\eta|^{2\beta-2+2\varepsilon} \int_{A(\eta, \xi)} |\hat{q}(\eta - \tau)|^2 d\sigma(\tau) d\sigma(\eta), \quad (3.4.3)$$

donde

$$\mathcal{A}_k(\eta) := \left\{ (\xi', \tau') \in \Gamma(\eta) \times \Gamma(\eta) : |\tau'| \leq |\xi'| \leq 2^{-k+1}|\eta|, |\xi' - \tau'| \leq \frac{|\eta|}{100} \right\}, \quad (3.4.4)$$

$$\mathcal{B}_k(\eta) := \left\{ (\xi', \tau') \in \mathcal{A}_k(\eta) : |\xi' - \tau'| \geq 2^{-k-2}|\eta| \right\}, \quad (3.4.5)$$

y  $\tilde{L}(\xi)$ ,  $A(\eta, \xi)$  se definen en (3.2.13), (3.2.14). Entonces

$$(i) \quad F_k^1(\eta) \leq C 2^{-k} |\eta|^2 \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2}, 2}}^2.$$

$$(ii) \quad F_k^2(\eta) \leq C |\eta| \|q\|_{L^2}^2.$$

$$(iii) \quad F^3(\xi) \leq C \int_{\mathbb{R}^3} |\lambda|^{2\beta-1+2\varepsilon} |\hat{q}(\lambda)|^2 d\lambda.$$

### Demostración del lema 3.4.1

• Prueba de (i).

Caso  $k$  grande ( $k \geq k_0$ ).

Expresamos  $\xi', \tau'$  en coordenadas esféricas:

$$\xi' = \frac{\eta}{2} + \frac{|\eta|}{2} u = \frac{\eta}{2} + \frac{|\eta|}{2} (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi), \quad (3.4.6)$$

$$\tau' = \frac{\eta}{2} + \frac{|\eta|}{2} v = \frac{\eta}{2} + \frac{|\eta|}{2} (\sin \psi \cos \delta, \sin \psi \sin \delta, \cos \psi), \quad (3.4.7)$$

donde  $u, v \in S^2$ ,  $\phi, \psi \in [0, \pi]$ ,  $\theta, \delta \in [-\pi, \pi]$ . Se verifica

$$d\sigma(\xi') = |\eta|^2 d\sigma(u) = |\eta|^2 \sin \phi d\phi d\theta,$$

$$d\sigma(\tau') = |\eta|^2 d\sigma(v) = |\eta|^2 \sin \psi d\psi d\delta.$$

Escribimos las expresiones (3.4.6), (3.4.7) en una referencia de  $\mathbb{R}^3$  ( $e_1, e_2, e_3$ ), donde  $e_1 := -\frac{\eta}{|\eta|}$ ,  $e_2 \in \{e_1\}^\perp$ ,  $e_3 \in \{e_1, e_2\}^\perp$ ,  $|e_j| = 1$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Para tal referencia, las condiciones  $|\tau'| \leq |\xi'| \leq 2^{-k+1}|\eta|$ ,  $k \geq k_0$ , para  $k_0$  suficientemente grande, garantizan que los ángulos satisfagan las relaciones

$$\left| \frac{\pi}{2} - \phi \right| \leq 2^{-k+3}, \quad \left| \frac{\pi}{2} - \psi \right| \leq 2^{-k+3}, \\ |\theta| \leq 2^{-k+3}, \quad |\delta| \leq 2^{-k+3}.$$

Estas condiciones implican que

$$|\xi'(\phi, \theta) - \tau'(\psi, \delta)| \sim |\eta| \max\{|\psi - \phi|, |\theta - \delta|\}, \quad (3.4.8)$$



donde

$$|\xi'(\phi, \theta) - \tau'(\psi, \delta)| = \frac{|\eta|}{2} |(\sin \phi \cos \theta - \sin \psi \cos \delta, \sin \phi \sin \theta - \sin \psi \sin \delta, \cos \phi - \cos \psi)|.$$

Esta propiedad es consecuencia de que el ángulo que forman  $u, v \in S^2$  es suficientemente pequeño para que sea del orden de la distancia  $|u - v|$ . Pero veámoslo rigurosamente. Tenemos

$$\begin{aligned} & |\xi'(\phi, \theta) - \tau'(\psi, \delta)| \\ &= \frac{|\eta|}{2} [\sin^2 \phi \cos^2 \theta + \sin^2 \psi \cos^2 \delta - 2 \sin \phi \sin \psi \cos \theta \cos \delta \\ &\quad + \sin^2 \phi \sin^2 \theta + \sin^2 \psi \sin^2 \delta - 2 \sin \phi \sin \psi \sin \theta \sin \delta \\ &\quad + \cos^2 \phi + \cos^2 \psi - 2 \cos \phi \cos \psi]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{|\eta|}{2} [\sin^2 \phi + \sin^2 \psi - 2 \sin \phi \sin \psi \cos(\theta - \delta) + \cos^2 \phi + \cos^2 \psi - 2 \cos \phi \cos \psi]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{|\eta|}{2} [2(1 - \cos \theta \cos \psi - \sin \phi \sin \psi \cos(\theta - \delta))]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Por una parte,

$$\begin{aligned} & |1 - \cos \theta \cos \psi - \sin \phi \sin \psi \cos(\theta - \delta)| \\ &= |1 - \cos(\psi - \phi) + \sin \phi \sin \psi (1 - \cos(\theta - \delta))| \leq \frac{|\psi - \phi|^2}{2} + \frac{|\theta - \delta|^2}{2}, \end{aligned}$$

puesto que para cualquier número real  $x$ ,  $|1 - \cos x| \leq \frac{x^2}{2}$ .

Por otra parte, sabiendo que  $1 - \cos x = 2 \sin^2(\frac{x}{2})$ ,  $|\sin y| \geq \frac{|y|}{2}$ , con  $|y| \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} & 1 - \cos(\psi - \phi) + \sin \phi \sin \psi (1 - \cos(\theta - \delta)) \\ &= 2 \sin^2\left(\frac{\psi - \phi}{2}\right) + \sin \phi \sin \psi 2 \sin^2\left(\frac{\theta - \delta}{2}\right) \\ &\geq 2 \left[ \sin^2\left(\frac{\psi - \phi}{2}\right) + C \sin^2\left(\frac{\theta - \delta}{2}\right) \right] \geq C[|\psi - \phi|^2 + |\theta - \delta|^2]. \end{aligned}$$

Para obtener la última desigualdad basta que  $|\phi - \psi|, |\theta - \delta| \leq 2$ , pero esa condición la tenemos si  $k_0 \geq 3$ . Recuérdese que  $|\psi - \phi|, |\theta - \delta| \leq 2^{-k_0+4}$ .

Por tanto,

$$|\xi' - \tau'| \sim |\eta| (|\psi - \phi|^2 + |\theta - \delta|^2)^{\frac{1}{2}} \sim |\eta| \max\{|\psi - \phi|, |\theta - \delta|\}.$$

Para  $k \geq k_0$ , podemos escribir

$$F_k^1(\eta) \leq C \int \int \int \int_{D(k)} \left| \hat{q} \left( \frac{|\eta|}{2} (v(\psi, \delta) - u(\phi, \theta)) \right) \right|^2 |\eta|^4 \sin \phi \sin \psi \, d\psi \, d\phi \, d\delta \, d\theta,$$

donde

$$D(k) := \left\{ (\theta, \delta, \phi, \psi) \in [-\pi, \pi]^2 \times [0, \pi]^2 : |\theta|, |\delta|, \left| \psi - \frac{\pi}{2} \right|, \left| \phi - \frac{\pi}{2} \right| \leq 2^{-k+3} \right\}. \quad (3.4.9)$$

Vamos a cambiar de coordenadas. Podemos elegir dos posibles cambios. Tomaremos  $(\psi, \delta, \theta)$  o bien  $(\phi, \psi, \theta)$ , como nuevas coordenadas para

$$\begin{aligned}\lambda &= \tau' - \xi' \\ &= \frac{|\eta|}{2} [(\sin \psi \cos \delta - \sin \phi \cos \theta)e_1 + (\sin \psi \sin \delta - \sin \phi \sin \theta)e_2 + (\cos \psi - \cos \phi)e_3].\end{aligned}$$

En el primer caso, el Jacobiano viene dado por

$$J_1(\psi, \theta, \delta) = \left| \frac{\partial \lambda}{\partial(\psi, \theta, \delta)} \right| = \frac{|\eta|^3}{8} \sin^2 \psi \sin \phi |\sin(\theta - \delta)|.$$

En el segundo,

$$J_2(\phi, \psi, \theta) = \left| \frac{\partial \lambda}{\partial(\phi, \psi, \theta)} \right| = \frac{|\eta|^3}{8} \sin \phi |\sin \phi \cos \psi \cos(\delta - \theta) - \sin \psi \cos \phi|.$$

Imponemos que  $k_0 \geq 4$ , a fin de tener  $|\sin(\theta - \delta)| \geq \frac{|\theta - \delta|}{2}$ . Se cumple

$$J_1(\psi, \theta, \delta) \geq C|\eta|^3|\theta - \delta|.$$

Además,

$$\begin{aligned}|\sin \phi \cos \psi \cos(\delta - \theta) - \sin \psi \cos \phi| &= |\sin(\phi - \psi) - \sin \phi \cos \psi(1 - \cos(\delta - \theta))| \\ &\geq |\sin(\phi - \psi)| - |\sin \phi \cos \psi(1 - \cos(\delta - \theta))| \geq \frac{|\phi - \psi|}{2} - \sin \phi |\cos \psi| \frac{(\delta - \theta)^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} [|\phi - \psi| - \sin \phi |\cos \psi|(\delta - \theta)^2].\end{aligned}$$

Luego

$$J_2(\phi, \psi, \theta) \geq \frac{|\eta|^3}{16} \sin \phi [|\phi - \psi| - \sin \phi |\cos \psi|(\delta - \theta)^2].$$

Si  $|\theta - \delta| \geq |\psi - \phi|$  se verifica que

$$\max\{|\theta - \delta|, |\psi - \phi|\} = |\theta - \delta|.$$

Consideramos las coordenadas  $(\psi, \theta, \delta)$  para  $\tau' - \xi'$ . Por (3.4.8), se tiene

$$J_1(\psi, \theta, \delta) \geq C|\eta|^3 \max\{|\theta - \delta|, |\psi - \phi|\} \geq C|\eta|^3 \frac{|\lambda|}{|\eta|} = C|\eta|^2 |\lambda|.$$

Entonces

$$F_k^1(\eta) \leq C \int_{\frac{\pi}{2} - 2^{-k+3}}^{\frac{\pi}{2} + 2^{-k+3}} \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{q}(\lambda)|^2 \frac{|\eta|^2}{|\lambda|} d\lambda d\phi = C 2^{-k} |\eta|^2 \|q\|_{W^{-\frac{1}{2}, 2}}^2.$$

Si  $|\theta - \delta| < |\psi - \phi|$  entonces

$$\max\{|\theta - \delta|, |\psi - \phi|\} = |\psi - \phi|.$$

Tomaremos las coordenadas  $(\psi, \phi, \theta)$  para  $\tau' - \xi'$ . Eligiendo  $k_0 \geq 5$ , se cumple  $|\phi - \psi| \leq \frac{1}{2}$ , y podemos escribir

$$\sin \phi \cos \psi |(\delta - \theta)^2 \leq (\delta - \theta)^2 \leq (\psi - \phi)^2 \leq \frac{1}{2} |\phi - \psi|.$$

Y deducimos que

$$J_2(\phi, \psi, \theta) \geq \frac{|\eta|^3}{32} \sin \phi |\phi - \psi|.$$

Aplicando (3.4.8) de nuevo,

$$J_2(\psi, \phi, \theta) \geq C|\eta|^3 \max\{|\theta - \delta|, |\psi - \phi|\} \geq C|\eta|^3 \frac{|\lambda|}{|\eta|} = C|\eta|^2 |\lambda|.$$

Entonces

$$F_k^1(\eta) \leq C \int_{-2^{-k+3}}^{2^{-k+3}} \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{q}(\lambda)|^2 \frac{|\eta|^2}{|\lambda|} d\lambda d\delta = C2^{-k} |\eta|^2 \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2}, 2}}^2.$$

*Caso  $k$  pequeño ( $k < k_0$ ).*

Recubrimos la esfera  $\Gamma(\eta)$  por una familia finita  $\{A_j : 1 \leq j \leq N_3\}$  de casquetes de radio  $\frac{|\eta|}{100}$  para cierta constante  $N_3 > 0$ , cumpliéndose

$$\Gamma(\eta) = \bigcup_{j=1}^{N_3} A_j.$$

Para cada casquete  $A_j$ , podemos elegir una referencia  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de modo que si expresamos  $\xi', \tau'$  en coordenadas esféricas como en (3.4.6), (3.4.7), las condiciones  $\xi' \in A_j$  y  $|\tau' - \xi'| \leq \frac{|\eta|}{100}$  garanticen que los ángulos  $\phi, \psi, \theta, \delta$  satisfagan

$$|\theta - \delta| \leq \frac{\pi}{100}, \quad \left| \phi - \frac{\pi}{2} \right|, \quad \left| \psi - \frac{\pi}{2} \right| \leq \frac{3}{100}.$$

Tal referencia se construye como sigue. Sea  $O_j$  el centro del casquete  $A_j$ . Tomamos  $e_1 := \frac{O_j - (\eta - O_j)}{|\eta|} = \frac{2O_j - \eta}{|\eta|}$ ,  $e_2 \in \{e_1\}^\perp$ ,  $e_3 \in \{e_1, e_2\}^\perp$ . Puesto que si  $\xi' \in A_j$  y  $|\tau' - \xi'| \leq \frac{|\eta|}{100}$  el ángulo que forman  $u$  y  $v$  está acotado por  $\frac{3}{100}$ , se puede probar la propiedad (3.4.8) idénticamente a como hicimos en el caso  $k \geq k_0$ .

Se tiene

$$\begin{aligned} F_k^1(\eta) &\leq \sum_{j=1}^{N_3} \int_{A_j} \int_{\Gamma(\eta) \cap \{|\tau' - \xi'| \leq \frac{|\eta|}{100}\}} |\hat{q}(\tau' - \xi')|^2 d\sigma(\tau') d\sigma(\xi') \\ &\leq CN_3 \int \int \int \int_D \left| \hat{q} \left( \frac{|\eta|}{2} (v(\psi, \delta) - u(\phi, \theta)) \right) \right|^2 |\eta|^4 \sin \phi \sin \psi d\psi d\phi d\delta d\theta, \end{aligned}$$

donde  $D$  no depende de  $j$  y se define como

$$D := \left\{ (\theta, \delta, \phi, \psi) \in [-\pi, \pi]^2 \times [0, \pi]^2 : |\theta - \delta|, \left| \psi - \frac{\pi}{2} \right|, \left| \phi - \frac{\pi}{2} \right| \leq \frac{\pi}{100} \right\}.$$

A continuación, procedemos de la misma forma que en el caso anterior aplicando los mismos cambios de variables para obtener la integral en  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ . Nótese que en este caso también gozamos de la propiedad  $|\sin(\theta - \delta)| \geq \frac{|\theta - \delta|}{2}$ . La integral en el ángulo extra genera una constante en lugar del factor  $2^{-k}$ , deduciéndose para  $k < k_0$

$$F_k^1(\eta) \leq C|\eta|^2 \|q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2}, 2}}^2.$$

□

• Prueba de (ii). La demostración sigue las mismas líneas que la prueba de la parte (i) con las siguientes variaciones suscitadas por la propiedad  $|\xi' - \tau'| \geq 2^{-k-2}|\eta|$ . Para empezar, tal propiedad nos dice que

$$\max\{|\phi - \psi|, |\theta - \delta|\} \geq C2^{-k}, \quad (3.4.10)$$

puesto que  $|\xi' - \tau'| \sim |\eta| \max\{|\phi - \psi|, |\theta - \delta|\}$ . Por consiguiente, podemos añadir al dominio  $D(k)$  (véase (3.4.9)) la condición (3.4.10). Este hecho permite acotar los jacobianos  $J_1, J_2$  como sigue:

$$\begin{cases} J_1(\psi, \theta, \delta) \geq C2^{-k}|\eta|^3, & \text{si } |\theta - \delta| \geq |\phi - \psi|, \\ J_2(\phi, \psi, \theta) \geq C2^{-k}|\eta|^3, & \text{si } |\theta - \delta| \leq |\phi - \psi|. \end{cases} \quad (3.4.11)$$

Una vez que obtenemos la integral en  $\lambda$ , la integral correspondiente al ángulo extra genera un factor  $2^{-k}$  que cancela el  $2^k$  procedente de las acotaciones en (3.4.11). Si  $k < k_0$  consideramos estas observaciones para un casquete fijo  $A_j$  del recubrimiento de la esfera  $\Gamma(\eta)$  usado en ese caso.

□

• Prueba de (iii). Seguimos las líneas de demostración de la afirmación 3.1.1. Expresamos  $\eta \in \tilde{L}(\xi)$  en coordenadas polares en el plano  $\{\xi\}^\perp$ :  $\eta = \xi + ru$ , con  $r > 0$ ,  $u \in \{\xi\}^\perp$ ,  $|u| = 1$ . Denotamos  $h(r) := |\eta| = (|\xi|^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}$ . Puesto que  $|\xi| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{100}\right)|\eta|$ , es cierto que  $r \geq 0,9|\xi|$ . Se cumple  $d\sigma(\eta) = r dr d\sigma(u)$ , donde  $d\sigma(u)$  es la medida natural sobre la circunferencia  $S^1$  en el plano  $\{\xi\}^\perp$ . Para  $u \in S^1$  fijo, tomamos una referencia  $\{e_1, e_2, e_3\}$  en  $\mathbb{R}^3$  tal que  $u = e_3$ . Entonces  $\xi = (\xi_1, \xi_2, 0)$  y  $\eta = (\xi_1, \xi_2, r)$ . Escribimos para  $\tau \in A(\xi + ru, \xi) = A(\xi, r, u)$ ,

$$\tau = \frac{\xi + ru}{2} + \frac{h(r)}{2} v, \quad v \in S^2,$$

con  $d\sigma(\tau) = h(r)^2 d\sigma(v)$ . Tomamos coordenadas esféricas en  $S^2$  respecto de la referencia citada:

$$v = (\sin\Theta \cos\theta, \sin\Theta \sin\theta, \cos\Theta), \quad 0 \leq \Theta \leq \pi, \quad -\pi \leq \theta < \pi,$$

con  $d\sigma(v) = \sin \Theta d\Theta d\theta$ . Para  $r, u$  fijos, sea  $\mathcal{M}(r, u) := \{(\Theta, \theta) \in [0, \pi] \times [-\pi, \pi] : \tau(r, u, \Theta, \theta) \in A(\xi, r, u)\}$ . Obtenemos

$$F^3(\xi) \leq \int_{S^1} \int_{0, 9|\xi|}^{\infty} \int \int_{\mathcal{M}(r, u)} r h(r)^{2\beta+2\varepsilon} \sin \Theta \\ \times \left| \hat{q} \left( \frac{1}{2} (\xi_1 - h(r) \cos \theta \sin \Theta, \xi_2 - h(r) \sin \theta \sin \Theta, r - h(r) \cos \Theta) \right) \right|^2 d\Theta d\theta dr d\sigma(u).$$

Para  $u$  fijo, hacemos el cambio de variables  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \leftrightarrow (r, \Theta, \theta)$ , dado por

$$\lambda = \eta - \tau = \frac{1}{2} (\xi_1 - h(r) \cos \theta \sin \Theta, \xi_2 - h(r) \sin \theta \sin \Theta, r - h(r) \cos \Theta).$$

Se tiene  $d\lambda = \frac{h(r)}{8} \sin \Theta |r - h(r) \cos \Theta| dr d\Theta d\theta$ .

Ya que  $\tau \in A(\xi, r, u)$  sabemos que  $|\tau| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{50}\right) |\eta|$  y por tanto,

$$\left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{50}\right)\right) |\eta| \leq |\eta - \tau| \leq |\eta|.$$

Luego teniendo en cuenta que  $(\Theta, \theta) \in \mathcal{M}(r, u)$  se cumple que  $|\lambda| \sim h(r)$ . Además, se verifica  $|\xi - \tau| \leq \frac{|\eta|}{50}$  y el ángulo  $\gamma$  que forman  $\eta - \xi$  y  $\eta - \tau$  satisface  $|\cos \gamma| \geq C > 0$ . Esto es,  $|(\eta - \xi) \cdot (\eta - \tau)| \sim |\eta - \xi| |\eta - \tau|$ . Esta propiedad nos dice que  $|r - h(r) \cos \Theta| \sim |\lambda|$ , puesto que  $u \cdot (\eta - \tau) = \frac{r - h(r) \cos \Theta}{2}$ . En nuestro dominio de integración se tiene que  $|r - h(r) \cos \Theta| \sim r$ :

$$|r - h(r) \cos \Theta| \sim |\lambda| \sim h(r) \sim r,$$

donde la condición  $h(r) \sim r$  se deduce de que  $r \geq 0, 9|\xi|$ .

Concluimos que

$$F^3(\xi) \leq \int_{S^1} \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{q}(\lambda)|^2 |\lambda|^{2\beta-1+2\varepsilon} d\lambda d\sigma(u).$$

□

**Lema 3.4.2.** Sean  $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  y  $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  tales que  $|\gamma + 1| < 3$  y  $k \geq 1$ . Denotamos

$$H_k^1(\xi) := \int_{\Lambda(\xi)} |\eta|^{2\beta-4} \int \int_{B_k(\eta)} |\hat{q}(\eta - \phi' - \xi')|^2 d\sigma(\xi') d\sigma(\phi') d\sigma(\eta), \quad (3.4.12)$$

$$H^2(\xi) := \int_{\Lambda(\xi)} |\eta|^\gamma \int_{\Gamma(\eta)} M \hat{q}(\eta - 2\xi')^2 d\sigma(\xi') d\sigma(\eta), \quad (3.4.13)$$

donde  $B_k(\eta)$  se define en (3.3.14). Entonces

$$(i) \ H_k^1(\xi) \leq C 2^{-2k} \int_{\mathbb{R}^3} |\lambda|^{2\beta-1} |\hat{q}(\lambda)|^2 d\lambda.$$

$$(ii) \ H^2(\xi) \leq C \|\mathcal{F}^{-1}(M\hat{q})\|_{\dot{W}^{\frac{\gamma+1}{2}, 2}}^2 \leq C \|q\|_{\dot{W}^{\frac{\gamma+1}{2}, 2}}^2.$$

**Demostración del lema 3.4.2**

• Prueba de (i). Para  $\eta \in \Lambda(\xi)$  escribimos  $\eta = \xi + sz$  y  $h(s) := |\eta| = (|\xi|^2 + s^2)^{\frac{1}{2}}$ , donde  $s \geq 0$  y  $z \in \{\xi\}^\perp$ ,  $|z| = 1$ . Se cumple  $d\sigma(\eta) = s ds d\sigma(z)$ , donde  $d\sigma(z)$  es la medida sobre la circunferencia unitaria  $S^1$  en el plano  $\{\xi\}^\perp$ . Se tiene

$$H_k^1(\xi) = \int_0^\infty \int_{S^1} h(s)^{2\beta-4} \int \int_{B_k(s,z)} |\hat{q}(\xi + sz - \phi' - \xi')|^2 d\sigma(\xi') d\sigma(\phi') d\sigma(z) s ds. \quad (3.4.14)$$

Hacemos el cambio de variables para  $\xi'$ ,  $\phi'$ :

$$\xi' = \frac{\xi + sz}{2} + \frac{h(s)}{2} v, \quad \phi' = \frac{\xi + sz}{2} + \frac{h(s)}{2} u, \quad u, v \in S^2,$$

con  $d\sigma(\xi') = C h(s)^2 d\sigma(v)$ ,  $d\sigma(\phi') = C h(s)^2 d\sigma(u)$ . El dominio de integración para  $v, u$  viene dado por

$$\left\{ (v, u) \in S^2 \times S^2 : |u - v| \leq 2^{-k+2}, 1 + u \cdot v \geq \frac{1}{5000} \right\},$$

ya que  $|\xi' - \phi'| \leq 2^{-k+1} h(s)$  implica  $|u - v| \leq 2^{-k+2}$ , y  $|\xi + sz - \phi' - \xi'| \geq \frac{h(s)}{100}$  implica  $1 + u \cdot v \geq \frac{1}{5000}$ . Sea  $\{D_{j,k} : j \in \{1, \dots, N_0 2^{2k}\}\}$  un recubrimiento finito de la esfera unitaria  $S^2$  con constante de solapamiento independiente de  $k$  tal que  $D_{j,k}$  es un casquete de radio  $\frac{2^{-k}}{100}$  y  $N_0$  una constante adecuada. Para cada  $j$  definimos

$$\tilde{D}_{j,k} := \left\{ u \in S^2 : |u - v| \leq 2^{-k+2}, 1 + u \cdot v \geq \frac{1}{5000}, \text{ para algún } v \in D_{j,k} \right\}.$$

La expresión (3.4.14) está acotada por

$$C \sum_{j=1}^{N_0 2^{2k}} \int_{S^1} \int_{D_{j,k}} \int_0^{+\infty} \int_{\tilde{D}_{j,k}} h(s)^{2\beta} \left| \hat{q}\left(-\frac{h(s)}{2} (u+v)\right) \right|^2 d\sigma(u) s ds d\sigma(v) d\sigma(z). \quad (3.4.15)$$

Nótese que para cada  $j \in \{1, \dots, N_0 2^{2k}\}$  dados  $u \in \tilde{D}_{j,k}$  y  $v \in D_{j,k}$  se cumple  $|u+v| \geq \frac{1}{100}$ . Veámoslo. Puesto que  $u \in \tilde{D}_{j,k}$  existe un  $v' \in D_{j,k}$  tal que  $1 + u \cdot v' \geq 1/5000$ , y por tanto,  $|u + v'| \geq 1/50$ . Se tiene

$$\begin{aligned} |u + v| &\geq |u + v'| - |v - v'| \geq \frac{1}{50} - \text{diám } D_{j,k} \\ &= \frac{1}{50} - \frac{2^{-k}}{50} \geq \frac{1}{50} - \frac{1}{100} = \frac{1}{100}. \end{aligned}$$

Tomamos coordenadas esféricas para  $u$  respecto de la referencia canónica de  $\mathbb{R}^3$ :

$$u = (\cos \theta \sin \psi, \sin \theta \sin \psi, \cos \psi), \quad (3.4.16)$$

con  $d\sigma(u) = \sin \psi d\psi d\theta$ . Acotamos (3.4.15) por

$$C \sum_{j=1}^{N_0 2^{2k}} \int_{S^1} \int_{D_{j,k}} \int_0^{+\infty} \int \int_{D_{j,k}^*} h(s)^{2\beta} \left| \hat{q}\left(-\frac{h(s)}{2} (u(\psi, \theta) + v)\right) \right|^2 \sin \psi d\psi d\theta s ds d\sigma(v) d\sigma(z),$$

donde  $u(\psi, \theta)$  viene dado por (3.4.16), y  $D_{j,k}^* := \{(\psi, \theta) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi) : u(\psi, \theta) \in \tilde{D}_{j,k}\}$ . Óbserve que para  $(\psi, \theta) \in D_{j,k}^*$  se verifica

$$|u(\psi, \theta) + v| \geq \frac{1}{100}. \quad (3.4.17)$$

Para cada  $z \in S^1$ ,  $j \in \{1, \dots, N_0 2^{2k}\}$ , y  $v \in D_{j,k}$  fijos consideramos el cambio de variables  $(s, \theta, \psi) \leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda$  dado por

$$\begin{aligned} \lambda &= \xi + sz - \phi' - \xi' = -\frac{h(s)}{2} (u(\psi, \theta) + v) \\ &= -\frac{h(s)}{2} (\cos \theta \sin \psi + v_1, \sin \theta \sin \psi + v_2, \cos \psi + v_3), \end{aligned}$$

donde  $v = (v_1, v_2, v_3)$ . Es cierto que  $d\lambda = \frac{sh(s)\sin\psi|1+u(\psi,\theta)\cdot v|}{8} ds d\psi d\theta$ . De la condición (3.4.17) se deduce que  $|\lambda| \sim h(s)$ . Definimos la siguiente familia de conjuntos con constante de solapamiento independiente de  $k$ :

$$\tilde{H}_{j,k} := \{r(u + v) : u \in \tilde{D}_{j,k}, v \in D_{j,k}, r < 0\}.$$

Teniendo presente que  $\sigma(D_{j,k}) \sim 2^{-2k}$ , tenemos

$$\begin{aligned} H_k^1(\xi) &\leq C \sum_{j=1}^{N_0 2^{2k}} \int_{S^1} \int_{D_{j,k}} \int_{\tilde{H}_{j,k}} |\lambda|^{2\beta-1} |\hat{q}(\lambda)|^2 d\lambda d\sigma(v) d\sigma(z) \\ &\leq C 2^{-2k} \int_{\mathbb{R}^3} \left( \sum_{j=1}^{N_0 2^{2k}} \chi_{\tilde{H}_{j,k}}(\lambda) \right) |\lambda|^{2\beta-1} |\hat{q}(\lambda)|^2 d\lambda \\ &\leq C 2^{-2k} \int_{\mathbb{R}^3} |\lambda|^{2\beta-1} |\hat{q}(\lambda)|^2 d\lambda. \end{aligned}$$

□

• Prueba de (ii). Escribimos  $\eta = \xi + sz$ , con  $|z| = 1$ ,  $z \in \{\xi\}^\perp$ ,  $s > 0$ ,  $d\sigma(\eta) = s ds d\sigma(z)$ . Escribimos  $h(s) := |\eta| = (|\xi|^2 + s^2)^{\frac{1}{2}}$ . Para cada  $s, z$  fijos hacemos  $\xi' = \frac{\xi + sz}{2} + \frac{h(s)}{2} u$ , donde  $u \in S^2$  y a su vez expresamos  $u$  en coordenadas esféricas respecto de la referencia canónica:

$$u = (\sin \Theta \cos \theta, \sin \Theta \sin \theta, \cos \Theta),$$

con  $\Theta \in [0, \pi]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Sabemos que

$$d\sigma(\xi') = C h(s)^2 d\sigma(u) = C h(s)^2 \sin \Theta d\theta d\Theta.$$

Para cada  $z$  fijo hacemos el cambio de variables  $(s, \Theta, \theta) \rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda$  dado por

$$\lambda = \eta - 2\xi' = -h(s) u = -h(s) (\sin \Theta \cos \theta, \sin \Theta \sin \theta, \cos \Theta),$$

verificándose  $d\lambda = sh(s) \sin \Theta ds d\Theta d\theta$ . Puesto que  $h(s) = |\lambda|$ , nos queda

$$H^2(\xi) \leq C \int_{\mathbb{R}^3} |\lambda|^{\gamma+1} M\hat{q}(\lambda)^2 d\lambda \leq C \|q\|_{W^{(\gamma+1)/2, 2}}^2,$$

donde la última desigualdad se obtiene del lema B.4 en el caso  $n = 3$ ,  $\alpha = (\gamma + 1)/2$ , ya que  $|\gamma + 1| < 3$ .

□

## Capítulo 4

# Prueba de los teoremas concluyentes

En este breve capítulo vamos a demostrar de manera concisa los teoremas 1.5.1 y 1.5.2 que se extraen como consecuencia de los resultados estudiados en los dos capítulos precedentes y que expresamos de manera sintética en dimensión 2 y 3 de la forma siguiente.

**Teorema 4.1.** *Sean  $n \in \{2, 3\}$ ,  $0 \leq \alpha < n/2$ , y  $q \in W^{\alpha,2}(\mathbb{R}^n)$  de soporte compacto. Entonces, módulo una función  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , se cumple que  $q - q_B \in W^{\beta,2}(\mathbb{R}^n)$ , para todo  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que  $0 \leq \beta < \alpha + \frac{1}{2}$ .*

Para lograr este objetivo dedicamos la sección 4.1 a estudiar las estimaciones conocidas para el término general de la serie de Neumann-Born. En la sección 4.2 presentamos la demostración de los teoremas 1.5.1 y 1.5.2 sin estimar el resto de la serie de Neumann-Born.

Finalmente, en la sección 4.3 comparamos la ganancia de regularidad de  $q - q_B$  respecto de  $q$  que hemos conseguido en el teorema 4.1 con la obtenida para los datos de ángulo fijo en [Rul].

### 4.1. Estimaciones de los términos j-ésimos

En esta sección vamos a probar las estimaciones del término j-ésimo de la serie de Neumann-Born (1.4.8). El procedimiento que usaremos se basa en las estimaciones de la resolvente del laplaciano estudiadas en la sección 1.2 y constituye un método general de acotación de la dispersión múltiple no muy preciso pero suficiente para nuestro propósito.

#### Demostración de la proposición 1.5.1

Recordemos que el término j-ésimo de la serie de Neumann-Born de la amplitud de



*backscattering* viene dado por

$$\widehat{Q_j(q)}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik\theta \cdot y} (qR_+(k^2))^{j-1} (q(\cdot) e^{ik\theta \cdot (\cdot)})(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2ik\theta \cdot y} (qR_\theta(k^2))^{j-1} (q)(y) dy,$$

donde  $k > 0$  y  $\theta \in S^{n-1}$  vienen determinados por la relación  $\xi = -2k\theta$ . Se verifica

$$\widehat{Q_j(q)}(\xi) = \chi^*(\xi) \widehat{Q_j(q)}(\xi) + (1 - \chi^*(\xi)) \widehat{Q_j(q)}(\xi).$$

Puesto que el segundo término es una función de soporte compacto su transformada inversa de Fourier pertenece a la clase  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Pasando a polares de la forma  $\xi = -2k\theta$ ,  $k \geq 0$ ,  $\theta \in S^{n-1}$ , en el lado de la transformada de Fourier, podemos escribir

$$\begin{aligned} \|\tilde{Q}_j(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2\beta} |\widehat{\tilde{Q}_j(q)}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2\beta} \chi^*(\xi) |\widehat{Q_j(q)}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{k=\frac{C_0}{2}}^{+\infty} (2k)^{2\beta+n-1} \int_{S^{n-1}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{2ik\theta \cdot y} (qR_\theta(k^2))^{j-1} (q)(y) dy \right|^2 d\sigma(\theta) dk \\ &\leq C_n 2^{2\beta} \int_{k=\frac{C_0}{2}}^{+\infty} k^{2\beta+n-1} \int_{S^{n-1}} \|(qR_\theta(k^2))^{j-1} (q)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^2 d\sigma(\theta) dk. \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

Sea  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\psi = 1$  en el soporte de  $q$ . Entonces, por la desigualdad de Cauchy-Schwartz y para  $\delta = \delta(r)$  con  $r = 2$ , donde  $\delta(r)$  se define en (1.2.9), se tiene

$$\begin{aligned} \|(qR_\theta(k^2))^{j-1} (q)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &= \|q\psi R_\theta(k^2)(qR_\theta(k^2))^{j-2} (q)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|q\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|\psi R_\theta(k^2)(qR_\theta(k^2))^{j-2} (q)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C \|q\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|R_\theta(k^2)(qR_\theta(k^2))^{j-2} (q)\|_{L^2_{-\delta(2)}}. \end{aligned}$$

En virtud de la estimación para la resolvente saliente dada por la proposición 1.2.1 en el caso  $\alpha = 0$ ,  $r = 2$ ,  $t = t_1$ , con la condición  $0 \leq \frac{1}{t_1} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{n+1}$ , siendo  $\tilde{\delta} = \tilde{\delta}(t)$  con  $t = t_1$ , se cumple

$$\|R_\theta(k^2)(qR_\theta(k^2))^{j-2} (q)\|_{L^2_{-\delta(2)}} \leq C k^{-1+\frac{n-1}{2}(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{2})} \|(qR_\theta(k^2))^{j-2} (q)\|_{L^1_{\tilde{\delta}(t_1)}},$$

donde  $\tilde{\delta}(t)$  se define en (1.2.10). A su vez, aplicando la estimación para el producto de espacios de Sobolev dada por la proposición D.3 con  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ ,  $\alpha_3 = 0$ ,  $p = t_1$ ,  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = r_2$ ,  $\gamma' = \tilde{\delta}(t_1)$ ,  $\gamma = -\delta(r_2)$ , y las condiciones  $2\alpha \geq n(\frac{1}{2} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{t_1}) \geq 0$ ,  $t_1 < 2$ ,  $t_1 < r_2$ , tenemos

$$\|(qR_\theta(k^2))^{j-2} (q)\|_{L^1_{\tilde{\delta}(t_1)}} \leq C(\text{spt } q, \delta(r_2), \tilde{\delta}(t_1)) \|q\|_{W^{\alpha,2}} \|R_\theta(k^2)(qR_\theta(k^2))^{j-3} (q)\|_{W^{\alpha,r_2}_{-\delta(r_2)}}.$$

Aplicando reiteradamente las proposiciones 1.2.1 y D.3, con pesos adecuados en los espacios de Sobolev, se obtiene

$$\|R_\theta(k^2)(qR_\theta(k^2))^{j-2} (q)\|_{L^2_{-\delta(2)}} \leq C k^{\gamma_j} \|q\|_{W^{\alpha,2}}^{j-2} \|q\|_{W^{\alpha,2}_{\tilde{\delta}(2)}} \leq C k^{\gamma_j} \|q\|_{W^{\alpha,2}}^{j-1}$$

donde omitimos la dependencia de la constante respecto de los pesos, la última desigualdad se deduce del lema D.1, los  $t_i$ ,  $r_i$  están sujetos a las condiciones

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{1}{t_i} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{n+1}, & i = 1, \dots, j-2, \\ 0 \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{r_i} \leq \frac{1}{n+1}, & i = 2, \dots, j-1, \\ 0 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{r_i} - \frac{1}{t_{i-1}} \leq \frac{\alpha}{n}, & i = 3, \dots, j-1, \\ 0 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{t_1} \leq \frac{2\alpha}{n}, \\ t_i < \min\{2, r_{i+1}\}, & i = 1, \dots, j-2, \end{cases}$$

y además,  $\gamma_j := -(j-1) + \frac{n-1}{2} \left( \sum_{i=2}^{j-2} \left( \frac{1}{t_i} - \frac{1}{r_i} \right) + \frac{1}{t_1} - \frac{1}{r_{j-1}} \right)$ .

Sea  $\varepsilon > 0$  fijo, pero arbitrario. En dimensiones 2 y 3 podemos elegir  $\{r_i, t_i\}$  de forma que  $\frac{1}{t_i} - \frac{1}{r_{i+1}} = 1/2 - \alpha/n + \varepsilon$ , ( $2 \leq i \leq j-2$ ), y  $\frac{1}{t_1} - \frac{1}{r_2} = \max\{\varepsilon, \frac{1}{2} - \frac{2\alpha}{n}\}$ , siempre que  $\alpha < n/2$ . Podemos escribir

$$\|R_\theta(k^2)(qR_\theta(k^2))^{j-2}(q)\|_{L^2_{-\delta(2)}} \leq Ck^{\gamma_j(\varepsilon)} \|q\|_{W^{\alpha,2}}^{j-1},$$

donde

$$\begin{aligned} \gamma_j(\varepsilon) &:= -(j-1) + \frac{n-1}{2} \sum_{i=1}^{j-2} \left( \frac{1}{t_i} - \frac{1}{r_{i+1}} \right) \\ &= -(j-1) + \frac{n-1}{2} \sum_{i=2}^{j-2} \left( \frac{1}{2} + \varepsilon - \frac{\alpha}{n} \right) + \frac{n-1}{2} \max\left\{ \varepsilon, \frac{1}{2} - \frac{2\alpha}{n} \right\} \\ &= -(j-1) + \frac{n-1}{2} (j-3) \left( \frac{1}{2} + \varepsilon - \frac{\alpha}{n} \right) + \frac{n-1}{2} \max\left\{ \varepsilon, \frac{1}{2} - \frac{2\alpha}{n} \right\}. \end{aligned}$$

Pasando al límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ,

$$\|R_\theta(k^2)(qR_\theta(k^2))^{j-2}(q)\|_{L^2_{-\delta}} \leq Ck^{\gamma_j} \|q\|_{W^{\alpha,2}}^{j-1},$$

donde  $\gamma_j := -(j-1) + \frac{n-1}{2} (j-3) (1/2 - \alpha/n) + \frac{n-1}{2} \max\{0, \frac{1}{2} - \frac{2\alpha}{n}\}$ . Retomando la expresión (4.1.1), llegamos a

$$\|\tilde{Q}_j(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}^2 \leq C 2^{2\beta} \int_{k=\frac{C_0}{2}}^{+\infty} k^{2\beta+n-1+2\gamma_j} dk \|q\|_{L^2}^2 \|q\|_{W^{\alpha,2}}^{2j-2},$$

donde la integral que aparece es convergente si  $2\beta + 2\gamma_j + n < 0$ , es decir, si  $\beta < -\frac{n}{2} - \gamma_j$ . Pero para  $n \in \{2, 3\}$  se cumple  $-\frac{n}{2} - \gamma_j = \beta_j$ , donde  $\beta_j$  se define en (1.5.1). En particular, para  $\beta < \beta_j$  se verifica

$$\|\tilde{Q}_j(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C \frac{2^\beta}{\sqrt{\beta_j - \beta}} \left( \frac{C_0}{2} \right)^{\beta - \beta_j} \|q\|_{L^2} \|q\|_{W^{\alpha,2}}^{j-1}. \quad (4.1.2)$$

□

A fin de evitar el control del resto en la serie de Neumann-Born, la siguiente proposición garantiza, módulo una función  $C^\infty$ , la convergencia de la serie de Neumann-Born en  $W^{\beta,2}(\mathbb{R}^n)$ , para  $\beta < \alpha + \frac{1}{2}$ . En este resultado se sacrifica regularidad respecto de las estimaciones de la proposición 1.5.1, a cambio de la ganancia de decaimiento mediante una potencia negativa de  $C_0$ .

**Proposición 4.1.1.** *Sean  $n \in \{2, 3\}$ ,  $j \geq 4$  si  $n = 2$  y  $j \geq 5$  si  $n = 3$ . Supongamos que  $q \in W^{\alpha,2}(\mathbb{R}^n)$  es una función de soporte compacto, con  $0 \leq \alpha < n/2$ , y que  $C_0 > 1$ . Entonces, para cualquier  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que  $\beta < \alpha + \frac{1}{2}$ :*

$$\|\tilde{Q}_j(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\alpha, \beta) C_0^{15/4} \left( 2C_0^{-\frac{1}{4}} \|q\|_{W^{\alpha,2}} \right)^j \|q\|_{L^2} \|q\|_{W^{\alpha,2}}^{-1}. \quad (4.1.3)$$

#### Demostración de la proposición 4.1.1

Sea  $\varepsilon = \varepsilon(\alpha, \beta) := (\alpha + \frac{1}{2}) - \beta > 0$ . Teniendo en cuenta que  $2\beta = 2(\beta_j - \varepsilon) + 2(\alpha + \frac{1}{2} - \beta_j)$ , donde  $\beta_j$  se denota en (1.5.1), y que  $\alpha + \frac{1}{2} \leq \beta_j$  para nuestro  $j$ , escribimos

$$\begin{aligned} \|\tilde{Q}_j(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} &= \left[ \int_{|\xi| > C_0} |\xi|^{2\beta} |\mathcal{F}(Q_j(q))(\xi)|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_0^{\alpha + \frac{1}{2} - \beta_j} \left[ \int_{|\xi| > C_0} |\xi|^{2(\beta_j - \varepsilon)} |\mathcal{F}(Q_j(q))(\xi)|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= C_0^{\alpha + \frac{1}{2} - \beta_j} \|\tilde{Q}_j(q)\|_{\dot{W}^{\beta_j - \varepsilon, 2}} \\ &\leq C C_0^{\alpha + \frac{1}{2} - \beta_j} \frac{2^{\beta_j - \varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}} \left( \frac{C_0}{2} \right)^{-\varepsilon} \|q\|_{L^2} \|q\|_{W^{\alpha,2}}^{j-1} \\ &= C(\alpha, \beta) 2^{\beta_j} C_0^{\beta - \beta_j} \|q\|_{L^2} \|q\|_{W^{\alpha,2}}^{j-1}, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se desprende de la fórmula (4.1.2) en el caso  $\beta = \beta_j - \varepsilon$ . Observemos que

$$\beta - \beta_j < \alpha + \frac{1}{2} - \beta_j \leq \begin{cases} -\frac{3}{4}j + \frac{5}{2}, & \text{si } \alpha \leq \frac{1}{2}, \text{ y } n = 2, \\ -\frac{7}{8}j + \frac{25}{8}, & \text{si } \frac{1}{2} < \alpha < 1, \text{ y } n = 2, \\ -\frac{1}{4}j + \frac{9}{4}, & \text{si } \alpha \leq \frac{3}{4}, \text{ y } n = 3, \\ -\frac{3}{4}j + \frac{15}{4}, & \text{si } \frac{3}{4} < \alpha < \frac{3}{2}, \text{ y } n = 3. \end{cases}$$

Por tanto,  $\beta - \beta_j \leq -\frac{1}{4}j + \frac{15}{4}$ , para todo  $j$  como en el enunciado,  $0 \leq \alpha < \frac{n}{2}$ , y  $n \in \{2, 3\}$ . Además, en las mismas condiciones  $2^{\beta_j} \leq 2^j$ . De todo ello se deduce (4.1.3).  $\square$

## 4.2. Prueba de los teoremas 1.5.1 y 1.5.2

Ya estamos en condiciones de probar los teoremas 1.5.1 y 1.5.2 de manera conjunta, para  $n = 2, 3$ . El desarrollo en serie de Neumann-Born (1.4.8) nos permite escribir

$$\begin{aligned} q - q_B &= \mathcal{F}^{-1} \left( \widehat{\chi^* q_B - q} \right) + \mathcal{F}^{-1} \left( (1 - \chi^*) \widehat{q_B - q} \right) \\ &= \sum_{j=2}^{+\infty} \tilde{Q}_j(q) + \mathcal{F}^{-1} \left( (1 - \chi^*) \widehat{q_B - q} \right), \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{F}^{-1} \left( (1 - \chi^*) \widehat{q_B - q} \right)$  está en  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Es suficiente tomar  $C_0 > 1000$  para asegurar las estimaciones que conocemos para las cantidades  $\|\tilde{Q}_2(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}$ ,  $\|\tilde{Q}_3(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}$  en 2d dadas por la proposición 1.5.2 y el teorema 1.5.3 en (1.5.4), (1.5.3) (con  $0 \leq \beta < \alpha + \frac{1}{2}$ ), así como las estimaciones para  $\|\tilde{Q}_2(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}$ ,  $\|\tilde{Q}_3(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}$ ,  $\|\tilde{Q}_4(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}$  en 3d dadas por las proposiciones 1.5.3 y 1.5.4 y el teorema 1.5.4 en (1.5.8), (1.5.9), (1.5.6)-(1.5.7). Eligiendo  $C_0 > (2\|q\|_{W^{\alpha,2}})^4$  se obtiene la convergencia de la serie

$$\sum_{j=k}^{+\infty} \left( 2C_0^{-\frac{1}{4}} \|q\|_{W^{\alpha,2}} \right)^j,$$

para cualquier  $k \in \mathbb{Z}^+$ . Por la proposición 4.1.1,

$$\begin{aligned} \sum_{j=4}^{+\infty} \|\tilde{Q}_j(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} &\leq C'(\alpha, \beta, C_0) \|q\|_{L^2} \|q\|_{W^{\alpha,2}}^3, \text{ si } n = 2, \\ \sum_{j=5}^{+\infty} \|\tilde{Q}_j(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} &\leq C'(\alpha, \beta, C_0) \|q\|_{L^2} \|q\|_{W^{\alpha,2}}^4, \text{ si } n = 3, \end{aligned}$$

para cierta constante  $C'(\alpha, \beta, C_0) > 0$ . Por tanto, tomando

$$C_0 := \max\{1000, (2\|q\|_{W^{\alpha,2}})^4\} + 1,$$

se verifica que  $\mathcal{F}^{-1} \left( \widehat{\chi^* q_B - q} \right) \in W^{\beta,2}(\mathbb{R}^n)$ , para todo  $\beta < \alpha + \frac{1}{2}$ , si  $q \in W^{\alpha,2}(\mathbb{R}^n)$  y  $0 \leq \alpha < n/2$ .

□

## 4.3. Comparación con el *scattering* inverso de ángulo fijo

Recordemos que este problema inverso consiste en recuperar el potencial a partir de la amplitud de *scattering*  $u_\infty(k, \theta, \omega)$  suponiendo fija la dirección incidente  $\theta$ . Esta sección tiene por objeto comparar la recuperación de singularidades del potencial  $q$  a partir de los datos de *backscattering* en la escala de los espacios de Sobolev Hilbertianos (presentada en el teorema 4.1), con la obtenida en [Ru1] a partir de los datos de *scattering* con ángulo fijo, en dimensión 2 y 3. Allí se distingue entre dos aproximaciones de Born que, manteniendo nuestra notación, podríamos expresar como sigue:

**Definición.**

- (i) Llamaremos *primera aproximación de Born de  $q$  de ángulo fijo  $\theta$*  a la función  $q_B^\theta$  dada por

$$\widehat{q_B^\theta}(\xi) := u_\infty(k, \theta, \omega),$$

donde  $\xi := k(\omega - \theta)$ , con  $k = \frac{|\xi|}{2\theta \cdot \widehat{\xi}}$ ,  $\omega = \theta + 2(\theta \cdot \widehat{\xi})\widehat{\xi}$ ,  $\widehat{\xi} = \frac{\xi}{|\xi|}$ . Esta definición se corresponde con la dada por (1.4.12) (para  $q$  real).

- (ii) Suponemos  $\theta \in S^{n-1}$  fijo. Para  $q_1, q_2$  funciones de soporte compacto, se define el operador

$$Q_2^*(q_1, q_2)(k, \omega) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik\omega \cdot y} q_1(y) R_+(k^2)(q_2(\cdot) e^{ik\theta \cdot (\cdot)})(y) dy,$$

donde  $k > 0$  y  $\omega \in S^{n-1}$ . Nótese que cometemos el abuso de notación  $Q_2^*(q, q)(k, \omega) = Q_2^*(q)(k, \theta, \omega)$  (véase (1.3.6)).

- (iii) Sea  $\tilde{\chi}$  una función de corte regular cuyo soporte contenga al soporte del potencial  $q$ . Definimos la *segunda aproximación de Born de  $q$  de ángulo fijo  $\theta$*  como la función  $q_{B,2}^\theta$  dada por

$$\widehat{q_{B,2}^\theta}(\xi) := \widehat{q_B^\theta}(\xi) - Q_2^*(\tilde{\chi} q_B^\theta, \tilde{\chi} q_B^\theta)(k, \omega),$$

donde  $\xi = k(\omega - \theta)$ .

Los corolarios 1 y 2 en [Ru1] se pueden resumir en el siguiente

**Teorema 4.3.1.** ( $n = 2, 3$ ). Si  $q$  es una función real de soporte compacto perteneciente al espacio  $W^{\alpha,2}(\mathbb{R}^n)$ , con  $0 \leq \alpha < n/2$ , entonces  $q - q_B^\theta \in W^{\beta,2}(\mathbb{R}^n)$  para todo  $\beta < \beta_1$ , donde

$$\beta_1 := \begin{cases} \frac{5\alpha}{4} + \frac{1}{4}, & \text{si } n = 2, \\ \frac{4\alpha}{3}, & \text{si } n = 3. \end{cases}$$

El teorema 2 en [Ru1] afirma

**Teorema 4.3.2.** ( $n = 2, 3$ ). Sea  $q$  una función a valores reales de soporte compacto perteneciente a  $W^{\alpha,2}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . entonces  $q - q_{B,2}^\theta \in W^{\beta,2}(\mathbb{R}^n)$  para todo  $\beta < \beta_2$ , donde

$$\beta_2 := \begin{cases} \frac{5}{16} + \frac{21}{16} \alpha, & \text{si } n = 2, \\ \frac{13}{9} \alpha, & \text{si } n = 3. \end{cases}$$

Por un lado, la segunda aproximación de Born contiene más singularidades del potencial que la primera para los datos de ángulo fijo. También observamos que  $q - q_B$  tiene más regularidad que  $q - q_B^\theta$  a lo largo de todo el intervalo  $0 \leq \alpha < n/2$  con una ganancia de la fracción  $\frac{1-\alpha}{4}$  de derivada y  $\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3}$  de derivada en dimensión 2 y 3, respectivamente.

Por otro lado, en dimensión 2 se verifica que  $q - q_B$  es más regular que  $q - q_{B,2}^\theta$  en el intervalo  $0 < \alpha < \frac{3}{5}$  con una diferencia de  $\frac{3-5\alpha}{16}$  derivadas. En el intervalo  $\frac{3}{5} \leq \alpha < 1$ ,  $q - q_{B,2}^\theta$  pasa a ser más regular con una diferencia de  $\frac{5\alpha-3}{16}$  derivadas.

Y en dimensión 3,  $q - q_B$  es más regular que  $q - q_{B,2}^\theta$  en el intervalo  $0 < \alpha < \frac{9}{8}$  con una diferencia de  $\frac{1}{2} - \frac{4\alpha}{9}$  derivadas. En el intervalo  $\frac{9}{8} \leq \alpha < \frac{3}{2}$ ,  $q - q_{B,2}^\theta$  pasa a ser más regular con una diferencia de  $\frac{4\alpha}{9} - \frac{1}{2}$  derivadas.

A la vista de los resultados conocidos para ángulo fijo, la ganancia de regularidad de los términos de dispersión múltiple depende de la regularidad que se suponga a priori en el potencial. En cambio, para los datos de *backscattering* hay una ganancia de  $\frac{1}{2}^-$  derivada independientemente de  $\alpha$ . En particular, esa ganancia de derivada se tiene para datos poco regulares, que son los de interés físico.

Como hemos visto, para  $0 < \alpha < 3/5$  y  $0 < \alpha < 9/8$  en dimensión 2 y 3, respectivamente, la aproximación de Born para datos de retrodispersión recupera más singularidades del potencial que para datos de ángulo fijo, siendo en ese caso el esquema de migración más exacto para datos de *backscattering* que para ángulo fijo.

## Conclusiones y comentarios

En esta memoria hemos justificado matemáticamente el uso de la aproximación lineal (Tomografía de Difracción) para aproximar el potencial electrostático en el contexto del *backscattering*. La Tomografía de Difracción suministra aplicaciones interesantes en el campo de la Medicina, la Geofísica y otras áreas.

Más concretamente, hemos probado que las singularidades del potencial  $q$  están contenidas en la aproximación de Born  $q_B$  en la escala de Sobolev Hilbertiana en dimensiones  $n = 2$  y  $n = 3$ .

Para conseguirlo, partiendo de las estimaciones conocidas para los términos no lineales de la serie de Neumann-Born, la clave ha residido en el tratamiento de los términos cúbico y cuadrático en 2d y 3d, respectivamente. Es decir, hemos analizado matemáticamente los fenómenos de dispersión triple en 2d y dispersión cuádruple en 3d en el caso de la retrodispersión. De este modo, tras una larga serie de laboriosos cálculos se concluyen los dos resultados originales presentados en la memoria y que vienen dados por los teoremas 1.5.3 y 1.5.4.

Sin embargo, un análisis detallado de la demostración nos revela la estrategia que hay de fondo. Se distingue una cantidad considerable de casos para llegar a una situación que nos permita componer un abierto de  $\mathbb{R}^n$ , como por ejemplo un cono, a partir de dos variables que recorren subvariedades de dimensión  $n - 1$  que forman un ángulo entre ellas, eligiendo  $n$  variables transversales entre sí y controlando el resto de variables de forma conveniente. Esta estrategia depende fuertemente de la dimensión del espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$  y de la multiplicidad de la dispersión. Por ejemplo, tal situación se da en la siguiente expresión (véase (3.4.12)) que encontramos en el lema 3.4.2 de la sección 3.4

$$\int_{\Lambda(\xi)} |\eta|^{2\beta-4} \int \int_{B_k(\eta)} |\hat{q}(\eta - \phi' - \xi')|^2 d\sigma(\xi') d\sigma(\phi') d\sigma(\eta), \quad (4.3.1)$$

donde

$$B_k(\eta) := \left\{ (\xi', \phi') \in \Gamma(\eta) \times \Gamma(\eta) : |\xi' - \phi'| \leq 2^{-k+1}|\eta|, |\eta - \phi' - \xi'| \geq \frac{|\eta|}{100} \right\}.$$

Para completar una variedad de dimensión  $n$  sumando dos subvariedades de la esfera  $\Gamma(\eta)$ , éstas no pueden ser tangentes. Este hecho puede compararse en algún sentido al efecto regularizante que produce la convolución de dos medidas soportadas en hipersuperficies que o bien satisfacen ciertas propiedades de curvatura, o bien ciertas condiciones de tranversalidad entre sí. Aunque en este caso no se puede hablar de convolución, puesto que las hipersuperficies donde están soportadas las medidas consideradas pueden depender también de las variables involucradas. De hecho, la dependencia paramétrica respecto de  $\eta$  del

dominio de la integral  $\int_{\Gamma(\eta)} \hat{q}(\xi) \hat{q}(\eta - \xi) d\sigma(\xi)$  que aparece en la expresión  $\mathcal{F}(Q_2(q))(\eta)$ , no es ninguna convolución.

Los resultados en esta memoria para dimensión 2 y 3 pueden extenderse a potenciales que no tienen soporte compacto, supuesto un decaimiento apropiado en el infinito y midiendo las singularidades en la escala de los espacios de Sobolev con peso. Para simplificar nos hemos reducido al caso de soporte compacto.

El tratamiento que hacemos de los operadores  $Q_j(q)$  para  $j = 2, 3$  en dimensión  $n = 2$  y para  $j = 2, 3, 4$  en dimensión  $n = 3$  requiere una complejidad técnica considerable que no sabemos si se puede generalizar a cualquier dimensión. De momento sólo estamos en condiciones de asegurar que la obtención de la ganancia de  $\frac{1}{2}^-$  derivada de la serie de Neumann-Born respecto de  $q$  en cualquier dimensión  $n \geq 2$ , exige tratar unos cuantos términos por separado. Y como hemos comentado más arriba, las técnicas utilizadas para estudiar tales términos presentan una dependencia muy fuerte de la dimensionalidad. En particular, en dimensión mayor habría más dificultad para controlar el término de dispersión doble, pero en el caso de los términos de mayor dispersión tenemos más libertad debido a que aparece una casuística más amplia en la elección de las  $n$  variables transversales que han de generar un abierto de  $\mathbb{R}^n$ .

Observando el salto en la ganancia de derivada respecto a  $q$  del término cuadrático al cúbico y el aspecto de las estimaciones generales en la proposición 1.5.1 en dimensión 2, podemos esperar que cada término de la serie de Neumann-Born gane media derivada respecto al anterior, formulando la siguiente hipótesis

$$Q_j(q) \in W^{\beta_j, 2}(\mathbb{R}^2) + C^\infty(\mathbb{R}^2),$$

para todo  $\beta_j \in \mathbb{R}$  tal que  $0 \leq \beta_j < \alpha + \frac{j-1}{2}$ , con  $j \geq 2$ , suponiendo que  $q$  es una función de soporte compacto y  $q \in W^{\alpha, 2}(\mathbb{R}^2)$ ,  $0 \leq \alpha < 1$ . En dimensión 3 esta hipótesis posiblemente no se cumpla si nos basamos en la experiencia del estudio de los tres primeros términos no lineales de la serie de Neumann-Born analizados en esta memoria.

El fenómeno de dispersión múltiple es mucho más fuerte para datos de retrodispersión que para ángulo fijo, siendo más difícil de controlar en el primer caso, como sugiere el hecho de obtener la misma ganancia de media derivada respecto de  $q$  en los términos  $Q_2(q)$ ,  $Q_3(q)$ ,  $Q_4(q)$  en 3d, a diferencia del crecimiento en  $j$  de la ganancia de derivada de  $Q_j(q)$  en el ángulo fijo (véase [Ru1]).

El uso de la Tomografía de Difracción en el caso de la retrodispersión está mucho más extendido que en el caso de ángulo fijo como consecuencia de la dificultad de recuperar la aproximación de Born  $q_B^\theta$  a partir del campo lejano de ángulo fijo, como revela la identidad (1.4.12) debido fundamentalmente a las singularidades del cambio de variables  $\xi = k(\omega - \theta)$



en el hiperplano  $\{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi \cdot \theta = 0\}$ , frente a la simplicidad de la expresión (1.4.6) para la aproximación de Born para datos de *backscattering*.

A la vista de lo expuesto en la sección 4.3, la segunda aproximación de Born  $q_{B,2}^\theta$  para los datos de ángulo fijo parece contener más “información” del potencial  $q$  que la primera  $q_B^\theta$  en la escala de Sobolev Hilbertiana. A partir de los resultados estudiados en esta memoria y de las estimaciones conocidas de los términos de dispersión múltiple de ángulo fijo, para un potencial poco regular (y, por tanto, de mayor interés físico) el esquema de migración es más preciso para datos de retrodispersión que para datos de ángulo fijo.

# Apéndices

# Apéndice A

## Notación y definiciones

En este primer apéndice veremos algunos aspectos de notación y algunas definiciones que se utilizan a lo largo de la memoria.

### Notación específica

Para demostrar una acotación complicada a menudo formulamos una serie de afirmaciones de las que se sigue la acotación. Normalmente, la prueba de las afirmaciones se seguirá de otra serie de estimaciones que habrá que probar. Este método se emplea para estimar el término esférico  $Q'(q)$  en el apartado 2.2.1, para demostrar el lema 2.2.2 en el apartado 2.2.4, para probar el lema 3.2.1 en la subsección 3.2.1, y en la acotación del término esférico  $P'(q)$  en la subsección 3.3.1.

Introducimos a continuación alguna notación que aparece con frecuencia en este trabajo. Sean  $\eta, \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Denotaremos por  $\Gamma(\eta)$  y  $\Lambda(\xi)$  a la esfera de centro  $\eta/2$  y radio  $|\eta|/2$ , y al plano que pasa por  $\xi$  ortogonal a  $\xi$ , respectivamente:

$$\Gamma(\eta) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \left| x - \frac{\eta}{2} \right| = \frac{|\eta|}{2} \right\}, \quad (\text{A.0.1})$$

$$\Lambda(\xi) := \{ x \in \mathbb{R}^n : \xi \cdot (x - \xi) = 0 \}. \quad (\text{A.0.2})$$

Para  $\eta \in \mathbb{R}^n$  y  $j_0 \in \mathbb{N}$  fijos, el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$  se puede descomponer en la siguiente unión disjunta

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n = & \left\{ \tau : \left| \left| \tau - \frac{\eta}{2} \right| - \frac{|\eta|}{2} \right| \leq 2^{-N-1} |\eta| \right\} \\ & \cup \left\{ \tau : 2^{-N-1} |\eta| < \left| \left| \tau - \frac{\eta}{2} \right| - \frac{|\eta|}{2} \right| \leq 2^{-j_0+1} |\eta| \right\} \\ & \cup \left\{ \tau : \left| \left| \tau - \frac{\eta}{2} \right| - \frac{|\eta|}{2} \right| > 2^{-j_0+1} |\eta| \right\}, \end{aligned}$$

donde  $N = N(\eta) := [\log_2 |\eta|]$  y para que  $2^{-N-1} < 2^{-j_0+1}$  se exige que  $2^{j_0} \leq 8|\eta|$ . Por tanto,

$$\mathbb{R}^n = \left( \bigcup_{j=j_0}^N \Gamma_j(\eta) \right) \cup \tilde{\Gamma}_\infty(\eta) \cup \Gamma_{j_0^-}(\eta), \quad (\text{A.0.3})$$

donde

$$\begin{aligned} \Gamma_{j_0^-}(\eta) &:= \left\{ \tau \in \mathbb{R}^n : \left| \left| \tau - \frac{\eta}{2} \right| - \frac{|\eta|}{2} \right| > 2^{-j_0+1} |\eta| \right\}, \\ \Gamma_j(\eta) &:= \left\{ \tau \in \mathbb{R}^n : \left| \left| \tau - \frac{\eta}{2} \right| - \frac{|\eta|}{2} \right| \sim 2^{-j} |\eta| \right\}, \quad j_0 \leq j \leq N, \\ \tilde{\Gamma}_\infty(\eta) &:= \left\{ \tau \in \mathbb{R}^n : \left| \left| \tau - \frac{\eta}{2} \right| - \frac{|\eta|}{2} \right| \leq 2^{-N-1} |\eta| \right\}. \end{aligned}$$

Obsérvese que  $\tilde{\Gamma}_\infty(\eta) \subset \Gamma_\infty(\eta)$ , donde

$$\Gamma_\infty(\eta) := \left\{ \tau \in \mathbb{R}^n : \left| \left| \tau - \frac{\eta}{2} \right| - \frac{|\eta|}{2} \right| \leq 1 \right\}. \quad (\text{A.0.4})$$

Definimos la forma multilineal  $Q_j(f_1, \dots, f_j)$  en el lado de la transformada de Fourier por

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}(Q_j(f_1, \dots, f_j))(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik\theta \cdot y} (f_1 R_+(k^2))(f_2 R_+(k^2)) \dots (f_{j-1} R_+(k^2))(f_j(\cdot) e^{ik\theta \cdot (\cdot)})(y) dy, \end{aligned}$$

donde  $\xi = -2k\theta$ , con  $\theta \in S^{n-1}$ ,  $k > 0$ ,  $k = |\xi|/2$ ,  $\theta = -\xi/|\xi|$ , y la resolvente  $R_+(k^2)$  se define en la sección 1.2.

Para cada  $j \geq 2$ , usamos la notación

$$\tilde{Q}_j(q) := \mathcal{F}^{-1}(\chi^* \widehat{Q_j(q)}), \quad (\text{A.0.5})$$

donde  $Q_j(q)$  se define en (1.4.3) y  $\chi^*(\xi) = 1$  si  $|\xi| \geq C_0$ ,  $\chi^*(\xi) = 0$  si  $|\xi| < C_0$ , para cierta constante  $C_0 > 0$ .

También escribimos  $\tilde{Q}_j(f_1, \dots, f_j) = \mathcal{F}^{-1}(\chi^* \mathcal{F}(Q_j(f_1, \dots, f_j)))$ . Nótese el abuso de notación  $Q_j(q) = Q_j(q, \dots, q)$  y  $\tilde{Q}_j(q) = \tilde{Q}_j(q, \dots, q)$ .

## Multi-índices

Sea  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $k \geq 2$ . Denotamos como  $S_k$  al grupo de las permutaciones de orden  $k$  que se define como el conjunto de las aplicaciones biyectivas de  $\{1, 2, \dots, k\}$  en  $\{1, 2, \dots, k\}$  dotado de la operación de composición.

Dados dos enteros  $a, b$  tales que  $0 \leq b \leq a$ , se denota el coeficiente binómico

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b! (a-b)!}.$$

Para un multi-índice  $\beta = (\beta^1, \dots, \beta^n) \in \mathbb{N}^n$ , escribimos  $\beta! := \beta^1! \cdot \dots \cdot \beta^n!$ , y denotamos el *orden de*  $\beta$  como  $|\beta| := \sum_{k=1}^n \beta^k$ . Dados dos multi-índices  $\beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$ , con  $\beta = (\beta^1, \dots, \beta^n)$ ,  $\gamma = (\gamma^1, \dots, \gamma^n)$ , la expresión  $\beta \leq \gamma$  significa que  $\beta^k \leq \gamma^k$ , para todo  $k \in \{1, \dots, n\}$ .

### Operadores diferenciales

Sea  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  un multi-índice. Definimos el operador diferencial  $D^\alpha$  por

$$D^\alpha u(x) = i^{-|\alpha|} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} u(x),$$

o también,

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}, \quad \text{donde } D_j = i^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Sea  $p(\xi)$  un polinomio

$$p(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha.$$

Se define el operador diferencial  $p(D)$  por

$$p(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha.$$

La transformada de Fourier  $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  es un isomorfismo. De hecho  $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = I$ . En particular, para  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , se verifica la *fórmula de inversión*

$$u(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi.$$

Derivando bajo el signo de la integral o integrando por partes, vemos que

$$D^\alpha u(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \xi^\alpha \widehat{u}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi.$$

Por tanto, para cualquier polinomio  $p(\xi)$  se cumple

$$\mathcal{F}(p(D)u)(\xi) = p(\xi) \widehat{u}(\xi).$$

Este hecho motiva definir en general para cualquier función  $\phi(\xi)$ ,

$$\phi(D) = \mathcal{F}^{-1} \phi(\xi) \mathcal{F}.$$

Recordemos al *operador de Laplace*  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ . También definimos para  $\beta \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \Lambda^\beta &= (1 - \Delta)^{\beta/2} = \mathcal{F}^{-1} \langle \xi \rangle^\beta \mathcal{F}, \\ D^\beta &= (-\Delta)^{\beta/2} = \mathcal{F}^{-1} |\xi|^\beta \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Los operadores  $D^{-\beta}$  y  $\Lambda^{-\beta}$  a menudo reciben el nombre de *potencial de Riesz* (o *integral fraccionaria*) y *potencial de Bessel de orden*  $\beta$ , respectivamente.

### Estimaciones del operador maximal de Hardy-Littlewood y pesos

Se define el *operador maximal de Hardy-Littlewood* para bolas centradas como sigue:

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

El operador  $M$  está acotado en  $L^p(\mathbb{R}^n)$  si  $1 < p \leq +\infty$ . Además, existe una constante  $C > 0$  tal que para cualquier  $\lambda > 0$ ,

$$\mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}) \leq C \frac{\|f\|_{L^1}}{\lambda}.$$

**Definición.** Un *peso* es una función medible, no negativa y localmente integrable. Sea  $p \in \mathbb{R}$  tal que  $1 < p < +\infty$ . Se define la *clase de pesos*  $A_p$  como el conjunto de pesos  $w$  que satisfacen la llamada *condición*  $A_p$ , a saber, que existe una constante  $C > 0$  independiente de  $x$  y  $r$  tal que

$$\frac{1}{(\mathcal{L}^n(B))^p} \int_B w(y) dy \left( \int_B w(y)^{-\frac{1}{p-1}} dy \right)^{p-1} \leq C$$

para toda bola  $B$  centrada en  $x \in \mathbb{R}^n$  y de radio  $r > 0$ . La condición  $A_p$  es equivalente a la análoga con cubos en lugar de bolas.

El corolario 7.13 en [D] afirma

**Teorema A.1.** Sea  $1 < p < +\infty$ . Entonces  $M$  está acotado en  $L^p(w)$  si y sólo si  $w \in A_p$ .

### Espacios de Sobolev

Utilizaremos los espacios de Sobolev Hilbertianos no homogéneos y homogéneos

$$\dot{W}^{\alpha,2}(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \Lambda^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

$$\dot{W}^{\alpha,2}(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : D^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

así como los espacios de Sobolev con peso

$$W_\delta^{\alpha,p} := \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \|\Lambda^\alpha f\|_{L_\delta^p} < +\infty\},$$

donde  $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$  y  $1 \leq p \leq \infty$ . Para disponer de una norma en el espacio homogéneo  $\dot{W}^{\alpha,2}(\mathbb{R}^n)$ , éste debe definirse como el espacio de todas las distribuciones temperadas, módulo polinomios,  $f \in \mathcal{S}'/\mathcal{P}$  para las cuales la expresión  $|\xi|^\alpha \hat{f}$  es una función en  $L^2$ . Si identificamos dos distribuciones temperadas en  $\dot{W}^{\alpha,2}(\mathbb{R}^n)$  cuya diferencia sea un polinomio la cantidad  $\|f\|_{\dot{W}^{\alpha,2}} := \| |\cdot|^\alpha \hat{f} \|_{L^2}$  es una norma.

### Funciones valoradas en espacios de Banach

Dados dos espacios de Banach  $A, B$ ,  $\mathcal{L}(A, B)$  denota al conjunto de aplicaciones lineales y continuas de  $A$  en  $B$ . Por  $L^p(A)$  denotamos el espacio de Bochner-Lebesgue de funciones medibles valoradas en  $A$  y con potencia  $|f(x)|^p$  integrable con respecto a la medida de Lebesgue.  $L_0^\infty(A)$  designará el conjunto de las funciones esencialmente acotadas  $f$  a valores en  $A$  tales que se anulan fuera de un compacto  $E \subset \mathbb{R}^n$ . A ese compacto  $E$  le llamamos *soporte* de  $f$ .

## Apéndice B

### Algunos resultados

En este apéndice enunciamos y demostramos algunos resultados utilizados con frecuencia en los argumentos estudiados en los capítulos 2 y 3.

Empezaremos por el siguiente lema en [RV].

**Lema B.1.** *Supongamos que el soporte de  $q$  está contenido en la bola unitaria. Entonces:*

- (1) *Si  $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$  verifican  $|\xi - \xi'| \leq 3$  entonces  $|\hat{q}(\xi)| \leq CM\hat{q}(\xi')$ .*
- (2)  *$\|\hat{q}\|_{L^\infty} \leq C\|\hat{q}\|_{L^2}$ .*
- (3) *Para  $0 < \beta < \frac{n}{2}$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\|q\|_{\dot{W}^{\alpha-\beta, 2}} \leq C\|q\|_{\dot{W}^{\alpha, 2}}$ , donde  $C$  depende del tamaño del soporte de  $q$ .*

#### Demostración.

Sea  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  una función de corte tal que  $\phi = 1$  en la bola unitaria. Entonces, dado que  $q = q\phi$ ,  $\hat{q} = \hat{q} * \hat{\phi}$ , de lo que se puede deducir (1). Se cumple

$$|\hat{q}(\xi)| \leq C \inf_{B_1(\xi)} M\hat{q}(\xi') \leq \left[ \int_{B_1(\xi)} |M\hat{q}(\xi')|^2 d\xi' \right]^{\frac{1}{2}} \leq C\|\hat{q}\|_{L^2},$$

para cada  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , donde el primer paso es por (1) y en el último aplicamos que el operador maximal  $M$  está acotado en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , con lo que se prueba (2). Para probar (3) podemos suponer que  $\alpha = 0$ . Notemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\hat{q}(\xi)|^2}{|\xi|^{2\beta}} d\xi &= \int_{|\xi| < 1} \frac{|\hat{q}(\xi)|^2}{|\xi|^{2\beta}} d\xi + \int_{|\xi| > 1} \frac{|\hat{q}(\xi)|^2}{|\xi|^{2\beta}} d\xi \\ &\leq \|\hat{q}\|_{L^\infty}^2 \int_{|\xi| < 1} \frac{1}{|\xi|^{2\beta}} d\xi + \|\hat{q}\|_{L^2}^2 \leq C\|\hat{q}\|_{L^2}^2, \end{aligned} \tag{B.0.1}$$

donde se tiene en cuenta que  $\beta < \frac{n}{2}$  implica que la integral  $\int_{|\xi| < 1} \frac{1}{|\xi|^{2\beta}} d\xi$  es convergente y que  $\beta$  es positivo para tener  $|\xi|^{-2\beta} < 1$  en la segunda integral a la derecha de la igualdad en (B.0.1). Aplicamos (2) en el último paso.

□



Consideremos la siguiente subvariedad de  $\mathbb{R}^{2n}$ ,  $V := \{(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \xi \cdot (\xi - \eta) = 0\}$ .  $V$  es un fibrado que puede describirse desde el punto de vista de las secciones esféricas

$$V = \{(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \xi \in \Gamma(\eta)\}.$$

o de las secciones planas  $V = \{(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \eta \in \Lambda(\xi)\}$ . En este contexto, el siguiente lema en [RV] nos permite cambiar el orden de integración en  $\xi$  y  $\eta$ .

**Lema B.2.** Sea  $V := \{(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \xi \cdot (\xi - \eta) = 0\}$ . Consideremos las secciones esféricas  $\Gamma(\eta)$  y las secciones planas  $\Lambda(\xi)$  definidas en (A.0.1), (A.0.2). Sea  $d\sigma_\eta(\xi)$  la medida sobre  $\Gamma(\eta)$  inducida por la medida de Lebesgue  $n$ -dimensional  $d\xi$  y  $d\sigma_\xi(\eta)$  la medida inducida sobre  $\Lambda(\xi)$  por la medida de Lebesgue  $n$ -dimensional  $d\eta$ . Entonces

$$d\sigma_\eta(\xi)d\eta = \frac{|\eta|}{|\xi|} d\sigma_\xi(\eta)d\xi.$$

### Demostración del lema B.2

Sean  $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  y  $\eta \in \mathbb{R}^n$ . La proyección ortogonal (con signo) del vector  $\eta - \xi$  sobre la variedad  $\{\lambda\xi : \lambda \in \mathbb{R}\}$  viene dada por  $\frac{\xi}{|\xi|} \cdot (\eta - \xi)$ . Sea el  $\delta$ -entorno de  $\Lambda(\xi)$  contenido en el semiespacio  $\{\eta \in \mathbb{R}^n : \xi \cdot \eta > 0\}$ :

$$\Lambda_\delta(\xi) := \{\eta \in \mathbb{R}^n : 0 < \frac{\xi}{|\xi|} \cdot (\eta - \xi) < \delta\}.$$

Sea  $V_\delta := \{(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \eta \in \Lambda_\delta(\xi)\}$ . Podemos escribir

$$d\sigma_\xi(\eta)d\xi = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \chi_{V_\delta}(\eta, \xi) d\eta d\xi.$$

Supongamos que  $\eta \in \Lambda_\delta(\xi)$ . La proyección ortogonal de  $\eta$  sobre la variedad  $\{\lambda\xi : \lambda \in \mathbb{R}\}$  es un punto  $\xi_0 \in \Gamma(\eta)$ , puesto que  $\xi_0 - \eta$  y  $\xi_0$  son ortogonales. Nótese que

$$|\xi - \xi_0| = \left| \frac{\xi}{|\xi|} \cdot (\eta - \xi) \right| < \delta.$$

Luego, la condición  $0 < \frac{\xi}{|\xi|} \cdot (\eta - \xi) < \delta$  nos dice que existe un  $\xi_0 \in \Gamma(\eta)$  de la forma  $\xi_0 = \lambda\xi$ , para algún  $\lambda > 1$ , tal que  $|\xi - \xi_0| < \delta$ . Consideremos la sección de  $V_\delta$  para  $\eta = \eta_0 \in \mathbb{R}^n$ :

$$V_{\delta, \eta_0} := \{\xi \in \mathbb{R}^n : (\eta_0, \xi) \in V_\delta\} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \eta_0 \in \Lambda_\delta(\xi)\}.$$

Entonces  $\xi \in V_{\delta, \eta_0}$  si y sólo si existe un  $\xi_0 \in \Gamma(\eta_0)$  tal que  $\xi_0 = \lambda\xi$ , con  $\lambda > 1$ , y  $|\xi - \xi_0| < \delta$ . Podríamos decir que dada una dirección radial, con centro en el origen, los puntos de esa dirección que pertenecen a  $V_{\delta, \eta_0}$  son aquellos que distan menos que  $\delta$  del  $\xi_0$  en esa dirección y que están en el segmento  $\{\lambda\xi_0 : 0 \leq \lambda < 1\}$ . En tres dimensiones  $V_{\delta, \eta_0}$  es la región limitada por dos *esferas de Ewald* tangentes en el origen y centradas en puntos del segmento  $\{\lambda\eta_0 : 0 < \lambda < 1\}$ .

Hay muchas formas de hallar la medida inducida por  $d\xi$  sobre  $\Gamma(\eta_0)$ , tantas como formas de “ensanchar” la variedad  $\Gamma(\eta_0)$ . De hecho:

$$d\sigma_{\eta_0}(\xi) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\phi(\xi, \eta_0, \delta)} \chi_{V_{\delta, \eta_0}}(\xi) d\xi,$$

donde  $\phi(\xi, \eta_0, \delta)$  es la función de ensanchamiento y corresponde a la longitud máxima con que hemos engrosado la variedad  $\Gamma(\eta_0)$  en la dirección de la normal. Se tiene:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \chi_{V_{\delta}}(\eta, \xi) d\eta d\xi &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\phi(\xi, \eta, \delta)}{\delta} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\phi(\xi, \eta, \delta)} \chi_{V_{\delta}}(\eta, \xi) d\eta d\xi \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\phi(\xi, \eta, \delta)}{\delta} d\sigma_{\eta}(\xi) d\eta. \end{aligned}$$

Se puede demostrar que  $\phi(\xi, \eta, \delta) = \delta \cos \alpha + o(\delta)$ , cuando  $\delta \rightarrow 0$ , donde  $\alpha$  es el ángulo comprendido entre  $\xi$  y  $\eta$ , y se verifica

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\phi(\xi, \eta, \delta)}{\delta} = \cos \alpha = \frac{|\xi|}{|\eta|},$$

concluyendo que

$$d\sigma_{\xi}(\eta) d\xi = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \chi_{V_{\delta}}(\eta, \xi) d\eta d\xi = \frac{|\xi|}{|\eta|} d\sigma_{\eta}(\xi) d\eta.$$

□

**Lema B.3.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  una función medible y  $\varphi(x)$  una función no negativa, radial, decreciente en  $|x|$  e integrable. Entonces existe una constante  $C_n$  que sólo depende de la dimensión  $n$ , tal que

$$|(\varphi * f)(x)| \leq C_n \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} Mf(x), \text{ c.t.p. } x \in \mathbb{R}^n.$$

**Demostración.** Por una parte, existe una constante  $C'_n$  sólo dependiente de  $n$  tal que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(2^k) 2^{nk} \leq C'_n \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

De hecho, se tiene

$$\begin{aligned} &\int_{\{2^k < |x| \leq 2^{k+1}\}} \varphi(x) dx \\ &\geq \int_{\{2^k < |x| \leq 2^{k+1}\}} \varphi(2^{k+1}) dx = \varphi(2^{k+1}) \sigma_{n-1} \int_{2^k}^{2^{k+1}} r^{n-1} dr \\ &= \frac{\sigma_{n-1}}{n} \varphi(2^{k+1}) (2^{n(k+1)} - 2^{nk}) = \frac{\sigma_{n-1}}{n} (2^n - 1) \varphi(2^{k+1}) 2^{nk}, \end{aligned}$$

donde  $\sigma_{n-1}$  es la medida de la esfera unitaria  $S^{n-1}$  y se cumple

$$2^{-n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(2^k) 2^{nk} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(2^{k+1}) 2^{nk} \leq \frac{n}{\sigma_{n-1} (2^n - 1)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{\{2^k < |x| \leq 2^{k+1}\}} \varphi(x) dx$$

$$= \frac{n}{\sigma_{n-1}(2^n - 1)} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx < +\infty.$$

Esto es,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(2^k) 2^{nk} \leq \frac{n 2^n}{\sigma_{n-1}(2^n - 1)} \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Sea  $x \in \mathbb{R}^n$ . Se verifica

$$\begin{aligned} & |(\varphi * f)(x)| \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) |f(x-y)| dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(2^k) \chi_{\{2^k < |y| \leq 2^{k+1}\}}(y) |f(x-y)| dy \\ & = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(2^k) \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{2^k < |y| \leq 2^{k+1}\}}(y) |f(x-y)| dy \\ & \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(2^k) \int_{\{|y| \leq 2^{k+1}\}} |f(x-y)| dy \\ & = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(2^k) \mathcal{L}^n(B(x, 2^{k+1})) \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x, 2^{k+1}))} \int_{B(x, 2^{k+1})} |f(y)| dy \\ & \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(2^k) \omega_n 2^{n(k+1)} Mf(x) = 2^n \omega_n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(2^k) 2^{nk} Mf(x) \\ & \leq \frac{n 4^n \omega_n}{\sigma_{n-1}(2^n - 1)} \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} Mf(x), \end{aligned}$$

donde  $\omega_n$  es la medida de la bola unitaria  $B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ .

□

**Lema B.4.** Sean  $\alpha \in \mathbb{R}$  con  $|\alpha| < n/2$ , y  $q$  una función de soporte compacto perteneciente al espacio  $\dot{W}^{\alpha, 2}(\mathbb{R}^n)$ . Entonces existe una constante positiva  $C$  que depende del soporte de  $q$  tal que

$$\|\mathcal{F}^{-1}(M\hat{q})\|_{\dot{W}^{\alpha, 2}} \leq C \|q\|_{\dot{W}^{\alpha, 2}} \quad y \quad (B.0.2)$$

$$\|\mathcal{F}^{-1}(M\nabla\hat{q})\|_{\dot{W}^{\alpha, 2}} \leq C \|q\|_{\dot{W}^{\alpha, 2}}. \quad (B.0.3)$$

**Nota.** La expresión (B.0.2) es consecuencia de las estimaciones conocidas para el operador maximal de Hardy-Littlewood en  $L^2(\mathbb{R}^n)$  con pesos (véase el apéndice A) y no exige que la función  $q$  sea de soporte compacto.

#### Demostración del lema B.4

Para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$  con  $|\alpha| < n/2$ , existe una constante  $C > 0$  tal que

$$\|\mathcal{F}^{-1}(M\nabla\hat{q})\|_{\dot{W}^{\alpha, 2}} \leq C \sum_{j=1}^n \|(\cdot)_j q(\cdot)\|_{\dot{W}^{\alpha, 2}},$$

donde  $[(\cdot)_j q(\cdot)](x) := x_j q(x)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Para comprobar esto usaremos las estimaciones del operador maximal en  $L^p$  con pesos (véase el teorema A.1).

En el caso de un peso radial de la forma  $|\eta|^\beta$ , para probar la condición de pesos  $A_2$  podemos restringirnos a bolas centradas en el origen. Es fácil probar, cambiando a coordenadas polares, que si  $-\frac{n}{2} < \alpha < \frac{n}{2}$  y  $B$  es una bola centrada en el origen, la cantidad

$$\frac{1}{(\mathcal{L}^n(B))^2} \int_B |\eta|^{-2\alpha} d\eta \int_B |\eta|^{2\alpha} d\eta$$

es independiente del radio de  $B$ . Esto es, el peso  $w(\eta) = |\eta|^{2\alpha}$  satisface la condición  $A_2$ . De hecho, se puede demostrar que la función  $|x|^\beta$  es un peso  $A_p$  sólo si  $-n < \beta < n(p-1)$ . Se puede consultar una prueba de este hecho en la página 681 en [Gr]. Por el teorema A.1,  $M$  está acotado en el espacio  $L^2(|\eta|^{2\alpha})$ , si  $|\alpha| < n/2$ . Podemos escribir:

$$\begin{aligned} & \| \mathcal{F}^{-1}(M \nabla \hat{q}) \|_{\dot{W}^{\alpha,2}}^2 \\ &= \| M(\nabla \hat{q}) \|_{L^2(|\eta|^{2\alpha} d\eta)}^2 \leq C \| \nabla \hat{q} \|_{L^2(|\eta|^{2\alpha} d\eta)}^2 = C \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial \hat{q}(\eta)}{\partial \eta_j} \right|^2 |\eta|^{2\alpha} d\eta \\ &= C \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} |(-i(\cdot)_j q(\cdot))^\wedge(\eta)|^2 |\eta|^{2\alpha} d\eta. \end{aligned} \tag{B.0.4}$$

Fijamos  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Tomemos una función de Schwartz  $\psi$  tal que  $\psi = 1$  en el soporte de  $q$ . Se cumplirá que las seminormas en la clase de Schwartz de la función  $\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \xi_j}$  dependerán del soporte de  $q$ . Así, existe una constante  $C$  que depende del soporte de  $q$  tal que

$$\left| \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \xi_j}(\xi) \right| \leq \frac{C}{1 + |\xi|^{n+1}}.$$

Para todo  $\eta \in \mathbb{R}^n$ , se verifica

$$\begin{aligned} & |\mathcal{F}(-i(\cdot)_j q(\cdot))(\eta)| = |\mathcal{F}(-i(\cdot)_j \psi(\cdot) q(\cdot))(\eta)| \\ &= |(\mathcal{F}(-i(\cdot)_j \psi(\cdot)) * \hat{q})(\eta)| = \left| \left( \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \xi_j} * \hat{q} \right)(\eta) \right| \leq \left( \frac{C}{1 + |\cdot|^{n+1}} * |\hat{q}| \right)(\eta) \\ &\leq C \left\| \frac{1}{1 + |\cdot|^{n+1}} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} M\hat{q}(\eta). \end{aligned}$$

En la última desigualdad hemos aplicado el lema B.3. Obsérvese que la función  $\frac{C}{1+|\xi|^{n+1}}$  es radial, no negativa, decreciente e integrable. Absorbiendo en la constante  $C$  la norma  $\|1/(1 + |\cdot|^{n+1})\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ , a partir de (B.0.4) podemos seguir con

$$\leq C \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} |M\hat{q}(\eta)|^2 |\eta|^{2\alpha} d\eta = C \|M\hat{q}\|_{L^2(|\eta|^{2\alpha})}^2 \leq C \|\hat{q}\|_{L^2(|\eta|^{2\alpha})}^2 = C \|q\|_{\dot{W}^{\alpha,2}}^2.$$

Terminamos la prueba del lema B.4 señalando que para nuestro  $\alpha$  también se tiene

$$\| \mathcal{F}^{-1}(M\hat{q}) \|_{\dot{W}^{\alpha,2}} = \| M\hat{q} \|_{L^2(|\eta|^{2\alpha})} \leq C \|\hat{q}\|_{L^2(|\eta|^{2\alpha})} = C \|q\|_{\dot{W}^{\alpha,2}}.$$

□

## Apéndice C

# Reducción al caso $\alpha < \frac{n}{2}$ para $n = 2, 3$

El resultado concluyente de esta memoria nos dice que si  $q \in W^{\alpha,2}(\mathbb{R}^n)$  es una función de soporte compacto y  $\alpha \geq 0$  entonces  $q - q_B$  pertenece al espacio  $W^{\beta,2}(\mathbb{R}^n)$ , módulo una función  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , para todo  $\beta < \alpha + 1/2$  en dimensión  $n = 2, 3$ . En este apéndice pretendemos justificar que para obtener esto es suficiente suponer la reducción  $\alpha < n/2$ , como demostramos en el apartado C.2. La clave de tal reducción reside en una fórmula de integración por partes que estudiamos en el apartado C.1.

### C.1. Regla de Leibniz para la dispersión múltiple

En esta subsección vamos a probar la fórmula de integración por partes para el término  $Q_j(q)$  que enunciamos en el siguiente

**Teorema C.1.1.** *Sean  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $j \geq 2$ , y  $q \in W^{|\alpha|,2}(\mathbb{R}^n)$  una función de soporte compacto. Entonces*

$$D^\alpha Q_j(q) = \sum_{\substack{\beta_1 + \dots + \beta_j = \alpha \\ \beta_1, \dots, \beta_j \geq 0}} \frac{\alpha!}{\beta_1! \cdot \dots \cdot \beta_j!} Q_j(D^{\beta_1} q, \dots, D^{\beta_j} q).$$

Escribiendo la resolvente saliente del laplaciano  $R_+(k^2)$  como el operador de convolución con la solución fundamental saliente de la ecuación de Helmholtz  $\phi(x) = \phi_k(x)$  definida en (1.1.3), se deduce

$$\begin{aligned} \widehat{Q_j(q)}(-2k\theta) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik\theta \cdot y} q(y) (R_+(k^2)q)^{j-1} \left( e^{ik\theta \cdot (\cdot)} \right) (y) dy \\ &= \int_{(\mathbb{R}^n)^j} e^{ik\theta \cdot x_1} q(x_1) \prod_{l=1}^{j-1} (\phi_k(x_l - x_{l+1}) q(x_{l+1})) e^{ik\theta \cdot x_j} dx. \end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}(Q_j(f_1, \dots, f_j))(-2k\theta) \\ &= \int_{(\mathbb{R}^n)^j} e^{ik\theta \cdot x_1} f_1(x_1) \prod_{l=1}^{j-1} (\phi_k(x_l - x_{l+1}) f_{l+1}(x_{l+1})) e^{ik\theta \cdot x_j} dx, \end{aligned}$$

donde  $dx = dx_1 \cdot \dots \cdot dx_j$ , y  $x_l \in \mathbb{R}^n$ , para cualquier  $l = 1, \dots, j$ .

Sabemos que  $\mathcal{F}(D^\alpha Q_j(q))(-2k\theta) = (-i2k\theta)^\alpha \widehat{Q_j(q)}(-2k\theta)$ . Escribimos

$$\begin{aligned} & \widehat{Q_j(q)}(-2k\theta) \\ &= \int_{(\mathbb{R}^n)^j} e^{i2k\theta \cdot x_1} q(x_1) \prod_{l=1}^{j-1} (\phi_k(x_l - x_{l+1}) q(x_{l+1}) e^{-ik\theta \cdot (x_l - x_{l+1})}) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{(\mathbb{R}^n)^{j-1}} e^{i2k\theta \cdot x_1} q(x_1) \prod_{l=1}^{j-1} (\phi_k(y_l - y_{l+1}) q(x_1 + y_{l+1}) e^{-ik\theta \cdot (y_l - y_{l+1})}) dy dx_1, \end{aligned}$$

donde hemos aplicado el cambio de variables  $x_l = x_1 + y_l$ , para  $l \in \{2, \dots, j\}$ , con la notación  $y_1 = 0$ ,  $dy = dy_j \cdot \dots \cdot dy_2$ . Puesto que  $D^\alpha(e^{ia \cdot x}) = (ia)^\alpha e^{ia \cdot x}$ , para cualquier  $a \in \mathbb{R}^n$ , se cumple que

$$\begin{aligned} & (-i2k\theta)^\alpha \widehat{Q_j(q)}(-2k\theta) \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{(\mathbb{R}^n)^{j-1}} (D_{x_1}^\alpha e^{i2k\theta \cdot x_1}) q(x_1) \prod_{l=1}^{j-1} (\phi_k(y_l - y_{l+1}) q(x_1 + y_{l+1}) e^{-ik\theta \cdot (y_l - y_{l+1})}) dy dx_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{(\mathbb{R}^n)^{j-1}} e^{i2k\theta \cdot x_1} D_{x_1}^\alpha \left[ q(x_1) \prod_{l=1}^{j-1} (\phi_k(y_l - y_{l+1}) q(x_1 + y_{l+1}) e^{-ik\theta \cdot (y_l - y_{l+1})}) \right] dy dx_1 \\ &= \sum_{\substack{\beta_1 + \dots + \beta_j = \alpha \\ \beta_1, \dots, \beta_j \geq 0}} \frac{\alpha!}{\beta_1! \cdot \dots \cdot \beta_j!} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{(\mathbb{R}^n)^{j-1}} e^{i2k\theta \cdot x_1} D^{\beta_1} q(x_1) \\ & \quad \times \prod_{l=1}^{j-1} (\phi_k(y_l - y_{l+1}) e^{-ik\theta \cdot (y_l - y_{l+1})} D^{\beta_{l+1}} q(x_1 + y_{l+1})) dy dx_1, \end{aligned}$$

donde hemos aplicado la fórmula de Leibniz:

$$D^\alpha(f_1 \cdot \dots \cdot f_k) = \sum_{\substack{\beta_1 + \dots + \beta_k = \alpha \\ \beta_1, \dots, \beta_k \geq 0}} \frac{\alpha!}{\beta_1! \cdot \dots \cdot \beta_k!} D^{\beta_1} f_1 \cdot \dots \cdot D^{\beta_k} f_k,$$

suponiendo regularidad suficiente. Deshaciendo el cambio  $x_l = x_1 + y_l$ , obtenemos

$$(-i2k\theta)^\alpha \widehat{Q_j(q)}(-2k\theta) = \sum_{\substack{\beta_1 + \dots + \beta_j = \alpha \\ \beta_1, \dots, \beta_j \geq 0}} \frac{\alpha!}{\beta_1! \cdot \dots \cdot \beta_j!} \int_{(\mathbb{R}^n)^j} e^{ik\theta \cdot x_1} D^{\beta_1} q(x_1)$$

$$\times \prod_{l=1}^{j-1} \left( \phi_k(x_l - x_{l+1}) D^{\beta_{l+1}} q(x_{l+1}) \right) e^{ik\theta \cdot x_j} dx,$$

y termina la prueba del teorema C.1.1.

**Nota.** De la prueba de este teorema C.1.1 se deduce también la fórmula

$$D^\alpha \tilde{Q}_j(q) = \sum_{\substack{\beta_1 + \dots + \beta_j = \alpha \\ \beta_1, \dots, \beta_j \geq 0}} \frac{\alpha!}{\beta_1! \cdot \dots \cdot \beta_j!} \tilde{Q}_j(D^{\beta_1} q, \dots, D^{\beta_j} q), \quad (\text{C.1.1})$$

donde  $q$  se supone en las hipótesis de dicho teorema.

## C.2. Ganancia de $\frac{1}{2}^-$ derivada para cualquier $\alpha \geq 0$

En este apartado nuestro objetivo es probar el teorema 4.1 sin la restricción  $\alpha < n/2$ , es decir, queremos probar el teorema 1.0.1.

Una consecuencia de la estimación (1.5.4) es el siguiente

**Teorema C.2.1.** Sean  $\alpha \in \mathbb{R}$ , con  $0 \leq \alpha < 1$ , y  $q_1, q_2 \in W^{\alpha, 2}(\mathbb{R}^2)$  funciones de soporte compacto. Entonces  $Q_2(q_1, q_2) \in W^{\beta, 2}(\mathbb{R}^2)$ , módulo una función  $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ , para cualquier  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que  $0 \leq \beta < \alpha + \frac{1}{2}$ . Además, para cualquier  $\beta$  así, existe una constante  $C(\alpha, \beta, q_1, q_2) > 0$  que depende de  $\alpha, \beta$  y de los soportes de  $q_1, q_2$  tal que

$$\|\tilde{Q}_2(q_1, q_2)\|_{W^{\beta, 2}} \leq C(\alpha, \beta, q_1, q_2) \max\{\|q_1\|_{W^{\alpha, 2}}^2, \|q_2\|_{W^{\alpha, 2}}^2\}.$$

Antes de pasar a la demostración de este teorema veamos la siguiente fórmula que admite la forma bilineal  $Q_2(f_1, f_2)$  en cualquier dimensión como consecuencia de la expresión (1.2.3) que admite la resolvente del laplaciano.

**Lema C.2.1.** Sean  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \geq 2$  y  $\eta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Entonces

$$\mathcal{F}(Q_2(f_1, f_2))(\eta) = v.p. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\hat{f}_1(\xi) \hat{f}_2(\eta - \xi)}{\xi \cdot (\eta - \xi)} d\xi + \frac{i\pi}{|\eta|} \int_{\Gamma(\eta)} \hat{f}_1(\xi) \hat{f}_2(\eta - \xi) d\sigma(\xi). \quad (\text{C.2.1})$$

**Nota.** La expresión (C.2.1) revela la propiedad de simetría de la forma bilineal  $Q_2$ . Haciendo  $f_1 = f_2 = q$  en dicha expresión se deduce la identidad (2.1.1).

### Demostración del lema C.2.1

Dado  $\eta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , sean  $k > 0$  y  $\theta \in S^{n-1}$  tales que  $\eta = -2k\theta$ , es decir,  $k = \frac{|\eta|}{2}$  y  $\theta = -\frac{\eta}{|\eta|}$ . Entonces

$$\mathcal{F}(Q_2(f_1, f_2))(\eta) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik\theta \cdot y} f_1(y) R_+(k^2)(f_2(\cdot) e^{ik\theta \cdot (\cdot)})(y) dy.$$

A partir de (1.2.3) se obtiene

$$R_+(k^2)f(x) = v.p. \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \frac{\hat{f}(\xi)}{-|\xi|^2 + k^2} d\xi + \frac{i\pi}{2} k^{n-2} \int_{S^{n-1}} \hat{f}(k\omega) e^{ikx \cdot \omega} d\sigma(\omega). \quad (C.2.2)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(Q_2(f_1, f_2))(\eta) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik\theta \cdot y} f_1(y) \int_{\mathbb{R}^n} e^{iy \cdot \xi} \frac{\hat{f}_2(\xi - k\theta)}{-|\xi|^2 + k^2} d\xi dy \\ &\quad + \frac{i\pi}{2} k^{n-2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik\theta \cdot y} f_1(y) \int_{S^{n-1}} \hat{f}_2(k\omega - k\theta) e^{iky \cdot \omega} d\sigma(\omega) dy \\ &:= A_1 + A_2. \end{aligned}$$

Se tiene

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\hat{f}_2(\xi - k\theta)}{-|\xi|^2 + k^2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(k\theta + \xi) \cdot y} f_1(y) dy d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\hat{f}_2(\xi - k\theta)}{-|\xi|^2 + k^2} \hat{f}_1(-k\theta - \xi) d\xi \\ &= v.p. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\hat{f}_1(x) \hat{f}_2(\eta - x)}{x \cdot (\eta - x)} dx, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se deduce del cambio de variable  $x = -k\theta - \xi$  y de la identidad  $-|k\theta + x|^2 + k^2 = x \cdot (\eta - x)$ :

$$-|k\theta + x|^2 + k^2 = -(k^2 + |x|^2 + 2k\theta \cdot x) + k^2 = -|x|^2 + \eta \cdot x = x \cdot (\eta - x).$$

Además,

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{i\pi}{2} k^{n-2} \int_{S^{n-1}} \hat{f}_2(k\omega - k\theta) \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik(\theta + \omega) \cdot y} f_1(y) dy d\sigma(\omega) \\ &= \frac{i\pi}{2} k^{n-2} \int_{S^{n-1}} \hat{f}_2(k\omega - k\theta) \hat{f}_1(-k\theta - k\omega) d\sigma(\omega) \\ &= \frac{i\pi}{2} k^{-1} \int_{\Gamma(\eta)} \hat{f}_1(x) \hat{f}_2(\eta - x) d\sigma(x) = \frac{i\pi}{|\eta|} \int_{\Gamma(\eta)} \hat{f}_1(x) \hat{f}_2(\eta - x) d\sigma(x), \quad (C.2.3) \end{aligned}$$

donde la primera igualdad en (C.2.3) resulta de aplicar el cambio de variable  $\omega \rightarrow x$  dado por  $x = -k\theta - k\omega = \frac{\eta}{2} - \frac{|\eta|}{2}\omega$  con Jacobiano  $d\sigma(x) = k^{n-1}d\sigma(\omega)$ . □

Siguiendo las líneas de la demostración del lema C.2.1 mediante la fórmula (C.2.2) se obtienen las siguientes expresiones para las formas  $Q_3(f_1, f_2, f_3)$ ,  $Q_4(f_1, f_2, f_3, f_4)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(Q_3(f_1, f_2, f_3))(\eta) \\ = v.p. \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\hat{f}_1(\xi) \hat{f}_3(\eta - \tau) \hat{f}_2(\tau - \xi)}{[\xi \cdot (\eta - \xi)] [\tau \cdot (\eta - \tau)]} d\xi d\tau \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{i\pi}{|\eta|} v.p. \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Gamma(\eta)} \frac{\widehat{f}_1(\xi) \widehat{f}_3(\eta - \tau) \widehat{f}_2(\tau - \xi)}{\tau \cdot (\eta - \tau)} d\sigma(\xi) d\tau \\
& + \frac{i\pi}{|\eta|} v.p. \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Gamma(\eta)} \frac{\widehat{f}_3(\xi) \widehat{f}_1(\eta - \tau) \widehat{f}_2(\tau - \xi)}{\tau \cdot (\eta - \tau)} d\sigma(\xi) d\tau \\
& - \frac{\pi^2}{|\eta|^2} \int_{\Gamma(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \widehat{f}_1(\xi) \widehat{f}_3(\eta - \tau) \widehat{f}_2(\tau - \xi) d\sigma(\xi) d\sigma(\tau), \\
& \mathcal{F}(Q_4(f_1, f_2, f_3, f_4))(\eta) \\
& = v.p. \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\widehat{f}_1(\xi) \widehat{f}_4(\eta - \tau) \widehat{f}_3(\tau - \phi) \widehat{f}_2(\phi - \xi)}{[\xi \cdot (\eta - \xi)] [\tau \cdot (\eta - \tau)] [\phi \cdot (\eta - \phi)]} d\xi d\tau d\phi \\
& + \frac{i\pi}{|\eta|} v.p. \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Gamma(\eta)} \frac{\widehat{f}_1(\xi) \widehat{f}_4(\eta - \tau) \widehat{f}_3(\tau - \phi) \widehat{f}_2(\phi - \xi)}{[\tau \cdot (\eta - \tau)] [\phi \cdot (\eta - \phi)]} d\sigma(\xi) d\tau d\phi \\
& + \frac{i\pi}{|\eta|} v.p. \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Gamma(\eta)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\widehat{f}_1(\xi) \widehat{f}_4(\eta - \tau) \widehat{f}_3(\tau - \phi) \widehat{f}_2(\phi - \xi)}{[\xi \cdot (\eta - \xi)] [\phi \cdot (\eta - \phi)]} d\xi d\sigma(\tau) d\phi \\
& + \frac{i\pi}{|\eta|} v.p. \int_{\Gamma(\eta)} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\widehat{f}_1(\xi) \widehat{f}_4(\eta - \tau) \widehat{f}_3(\tau - \phi) \widehat{f}_2(\phi - \xi)}{[\xi \cdot (\eta - \xi)] [\tau \cdot (\eta - \tau)]} d\sigma \xi d\tau d\sigma(\phi) \\
& - \frac{\pi^2}{|\eta|^2} v.p. \int_{\Gamma(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\widehat{f}_1(\xi) \widehat{f}_4(\eta - \tau) \widehat{f}_3(\tau - \phi) \widehat{f}_2(\phi - \xi)}{\xi \cdot (\eta - \xi)} d\xi d\sigma(\tau) d\sigma(\phi) \\
& - \frac{\pi^2}{|\eta|^2} v.p. \int_{\Gamma(\eta)} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Gamma(\eta)} \frac{\widehat{f}_1(\xi) \widehat{f}_4(\eta - \tau) \widehat{f}_3(\tau - \phi) \widehat{f}_2(\phi - \xi)}{\tau \cdot (\eta - \tau)} d\sigma(\xi) d\tau d\sigma(\phi) \\
& - \frac{\pi^2}{|\eta|^2} v.p. \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Gamma(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \frac{\widehat{f}_1(\xi) \widehat{f}_4(\eta - \tau) \widehat{f}_3(\tau - \phi) \widehat{f}_2(\phi - \xi)}{\phi \cdot (\eta - \phi)} d\sigma(\xi) d\sigma(\tau) d\phi \\
& - \frac{i\pi^3}{|\eta|^3} \int_{\Gamma(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \widehat{f}_1(\xi) \widehat{f}_4(\eta - \tau) \widehat{f}_3(\tau - \phi) \widehat{f}_2(\phi - \xi) d\sigma(\xi) d\sigma(\tau) d\sigma(\phi).
\end{aligned}$$

**Nota C.2.1.** En el caso  $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = q$  estas expresiones para  $Q_3$  y  $Q_4$  dan lugar a las correspondientes para  $Q_3(q)$ ,  $Q_4(q)$  en (2.2.1)-(2.2.3), (3.3.1)-(3.3.6). En el lado de Fourier para el término cuártico con  $f_j = q$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , las variables  $\xi, \tau$  juegan papeles simétricos en el sentido de las igualdades:

$$\begin{aligned}
& v.p. \int_{\Gamma(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\widehat{q}(\xi) \widehat{q}(\eta - \tau) \widehat{q}(\tau - \phi) \widehat{q}(\phi - \xi)}{\xi \cdot (\eta - \xi)} d\xi d\sigma(\tau) d\sigma(\phi) \\
& = v.p. \int_{\Gamma(\eta)} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Gamma(\eta)} \frac{\widehat{q}(\xi) \widehat{q}(\eta - \tau) \widehat{q}(\tau - \phi) \widehat{q}(\phi - \xi)}{\tau \cdot (\eta - \tau)} d\sigma(\xi) d\tau d\sigma(\phi),
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
& v.p. \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Gamma(\eta)} \frac{\widehat{q}(\xi) \widehat{q}(\eta - \tau) \widehat{q}(\tau - \phi) \widehat{q}(\phi - \xi)}{[\tau \cdot (\eta - \tau)] [\phi \cdot (\eta - \phi)]} d\sigma(\xi) d\tau d\phi \\
& = v.p. \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Gamma(\eta)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\widehat{q}(\xi) \widehat{q}(\eta - \tau) \widehat{q}(\tau - \phi) \widehat{q}(\phi - \xi)}{[\xi \cdot (\eta - \xi)] [\phi \cdot (\eta - \phi)]} d\xi d\sigma(\tau) d\phi.
\end{aligned}$$

**Demostración del teorema C.2.1**

El operador  $\tilde{Q}_2$  es una forma bilineal simétrica que satisface la identidad<sup>1</sup>

$$\tilde{Q}_2(q_1, q_2) = \frac{1}{4} \left[ \tilde{Q}_2(q_1 + q_2, q_1 + q_2) - \tilde{Q}_2(q_1 - q_2, q_1 - q_2) \right].$$

Tenemos

$$\begin{aligned} & \|\tilde{Q}_2(q_1, q_2)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \\ & \leq \frac{1}{4} \left[ \|\tilde{Q}_2(q_1 + q_2, q_1 + q_2)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} + \|\tilde{Q}_2(q_1 - q_2, q_1 - q_2)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \right] \end{aligned} \quad (C.2.4)$$

$$\leq \frac{C(\alpha, \beta, q_1, q_2)}{4} \left[ \|q_1 + q_2\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q_1 + q_2\|_{\dot{W}^{\alpha,2}} + \|q_1 - q_2\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q_1 - q_2\|_{\dot{W}^{\alpha,2}} \right] \quad (C.2.5)$$

$$\leq \frac{C(\alpha, \beta, q_1, q_2)}{2} \left[ \|q_1\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q_1\|_{\dot{W}^{\alpha,2}} + \|q_1\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q_2\|_{\dot{W}^{\alpha,2}} \right. \\ \left. + \|q_2\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q_1\|_{\dot{W}^{\alpha,2}} + \|q_2\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q_2\|_{\dot{W}^{\alpha,2}} \right]$$

$$\leq 2C(\alpha, \beta, q_1, q_2) \max\{\|q_1\|_{\dot{W}^{\alpha,2}}^2, \|q_2\|_{\dot{W}^{\alpha,2}}^2\},$$

donde pasamos de (C.2.4) a (C.2.5) aplicando la estimación (1.5.4) de la proposición 1.5.2 a las funciones  $q_1 + q_2$ ,  $q_1 - q_2 \in W^{\alpha,2}(\mathbb{R}^2)$ .

□

Siguiendo la pista a las ocurrencias de  $\hat{q}$  en la demostración del teorema 1.5.3 se puede probar el siguiente

**Teorema C.2.2.** Sean  $\alpha \in \mathbb{R}$ , con  $0 \leq \alpha < 1$ , y  $q_1, q_2, q_3 \in W^{\alpha,2}(\mathbb{R}^2)$  funciones de soporte compacto. Entonces  $Q_3(q_1, q_2, q_3) \in W^{\beta,2}(\mathbb{R}^2) + C^\infty(\mathbb{R}^2)$ , para cualquier  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que  $0 \leq \beta < \alpha + 1$ . Además, para cualquier  $\beta$  así, existe una constante  $C(\alpha, \beta, q_1, q_2, q_3) > 0$  que depende de  $\alpha, \beta$  y de los soportes de  $q_1, q_2, q_3$  tal que

$$\begin{aligned} & \|\tilde{Q}_3(q_1, q_2, q_3)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \\ & \leq C(\alpha, \beta, q_1, q_2, q_3) \sum_{\sigma \in S_3} \left( \|q_{\sigma(1)}\|_{L^2} \|q_{\sigma(2)}\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} + \|q_{\sigma(1)}\|_{L^2} \|q_{\sigma(2)}\|_{L^2} \right) \|q_{\sigma(3)}\|_{\dot{W}^{\alpha,2}}. \end{aligned}$$

**Idea de la prueba.**

Ya sabemos que el término trilineal  $Q_3(q_1, q_2, q_3)$  admite una descomposición similar a las expresiones (2.2.1)-(2.2.3) con  $q_1, q_2, q_3$ . Si nos centramos en el término esférico

$$\mathcal{F}(Q'(q_1, q_2, q_3))(\eta) := \frac{1}{|\eta|^2} \int_{\Gamma(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \hat{q}_1(\xi) \hat{q}_3(\eta - \tau) \hat{q}_2(\tau - \xi) d\sigma(\tau) d\sigma(\xi),$$

y empleamos la misma técnica para acotar la norma de Sobolev que en el caso de un sólo potencial  $q$  estudiada en la subsección 2.2.1, observamos que la cantidad

$$\|\mathcal{F}^{-1}(\chi \mathcal{F}(Q'(q_1, q_2, q_3)))\|_{\dot{W}^{\beta,2}}$$

<sup>1</sup>La cual recuerda a la identidad de polarización que se verifica en todo espacio pre-Hilbert  $(\mathbb{H}, \langle, \rangle)$ :

$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 \|u + i^k v\|^2 i^k$ , para todos  $u, v \in \mathbb{H}$ .

está acotada por una expresión de depende únicamente de  $\varepsilon := \alpha + 1 - \beta$  y de las normas de  $q_1, q_2, q_3$  en los espacios  $\dot{W}^{-\frac{1}{2}, 2}$ ,  $L^2$ ,  $\dot{W}^{\alpha, 2}$ .

Es importante señalar que en la prueba de la estimación (2.2.6) hay una reducción por simetría que no podemos hacer con tres funciones diferentes. Con un sólo potencial  $q$ , para acotar el caso  $II(\eta)$  nos limitamos al caso  $II_{>}(\eta)$  por simetría. Pero se cumple

$$Q'_{II_{<}}(q_1, q_2, q_3) = Q'_{II_{>}}(q_3, q_2, q_1),$$

con la notación

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(Q'_{II_{<}}(q_1, q_2, q_3))(\eta) &:= \frac{1}{|\eta|^2} \int_{II_{<}(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \widehat{q}_1(\xi) \widehat{q}_3(\eta - \tau) \widehat{q}_2(\tau - \xi) d\sigma(\tau) d\sigma(\xi), \\ \mathcal{F}(Q'_{II_{>}}(q_3, q_2, q_1))(\eta) &:= \frac{1}{|\eta|^2} \int_{II_{>}(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \widehat{q}_3(\xi) \widehat{q}_1(\eta - \tau) \widehat{q}_2(\tau - \xi) d\sigma(\tau) d\sigma(\xi). \end{aligned}$$

Sin embargo, esto no es problema, ya que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}^{-1}(\chi \mathcal{F}(Q'_{II_{<}}(q_1, q_2, q_3)))\|_{\dot{W}^{\beta, 2}} &\leq C \|q_1\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon, 2}} \|q_3\|_{L^2} \|q_2\|_{L^2}, \\ \|\mathcal{F}^{-1}(\chi \mathcal{F}(Q'_{II_{>}}(q_1, q_2, q_3)))\|_{\dot{W}^{\beta, 2}} &\leq C \|q_3\|_{\dot{W}^{\beta-1+\varepsilon, 2}} \|q_1\|_{L^2} \|q_2\|_{L^2}. \end{aligned}$$

□

Sean  $\alpha$  y  $q$  como en el teorema 1.0.1 para  $n = 2$ . Para todo  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que  $\beta < \alpha + \frac{1}{2}$ , formulamos las dos afirmaciones siguientes

$$\|\tilde{Q}_2(q)\|_{\dot{W}^{\beta, 2}} \leq C(\alpha, \beta, q) \max_{|\gamma| \leq [\alpha]} \|D^\gamma q\|_{\dot{W}^{\alpha-[\alpha], 2}}^2, \quad (\text{C.2.6})$$

$$\|\tilde{Q}_3(q)\|_{\dot{W}^{\beta, 2}} \leq C(\alpha, \beta, q) \max_{|\gamma| \leq [\alpha]} \|D^\gamma q\|_{\dot{W}^{\alpha-[\alpha], 2}}^3, \quad (\text{C.2.7})$$

donde la constante  $C(\alpha, \beta, q) > 0$  depende únicamente de  $\alpha, \beta$  y el soporte de  $q$ .

Para ver estas estimaciones nos será útil el siguiente lema técnico.

**Lema C.2.2.** Sean  $n \geq 2$ ,  $k \geq 1$  y  $j \geq 3$ . Entonces

$$\sum_{|\beta|=k} \sum_{\substack{\gamma_1 + \dots + \gamma_j = \beta \\ \gamma_1, \dots, \gamma_j \geq 0}} \frac{\beta!}{\gamma_1! \dots \gamma_j!} = \binom{k+n-1}{k} j^k,$$

donde el primer sumatorio se toma sobre los multi-índices  $\beta \in \mathbb{N}^n$  de orden  $k$ , y para cada  $\beta$ , el segundo sobre las listas ordenadas de longitud  $j$ ,  $(\gamma_1, \dots, \gamma_j) \in (\mathbb{N}^n)^j$ , de multi-índices con las condiciones  $\gamma_l \geq 0$ ,  $1 \leq l \leq j$ , y  $\sum_{l=1}^j \gamma_l = \beta$ .

**Demostración del lema C.2.2**

Hagamos un poco de combinatoria. Recordemos la fórmula del multinomio que dice que si  $x_1, \dots, x_l$  son números reales cualesquiera y  $m \in \mathbb{N}$ , se verifica

$$(x_1 + \dots + x_l)^m = \sum_{\substack{a_1, \dots, a_l \geq 0 \\ a_1 + \dots + a_l = m}} \frac{m!}{a_1! \dots a_l!} x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_l^{a_l}.$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
& \sum_{|\beta|=k} \sum_{\substack{\gamma_1+\dots+\gamma_j=\beta \\ \gamma_1, \dots, \gamma_j \geq 0}} \frac{\beta!}{\gamma_1! \dots \gamma_j!} \\
&= \sum_{|\beta|=k} \sum_{\substack{\gamma_1^1, \dots, \gamma_j^1 \geq 0 \\ \gamma_1^1 + \dots + \gamma_j^1 = \beta^1}} \frac{\beta^1!}{\gamma_1^1! \dots \gamma_j^1!} \cdots \sum_{\substack{\gamma_1^n, \dots, \gamma_j^n \geq 0 \\ \gamma_1^n + \dots + \gamma_j^n = \beta^n}} \frac{\beta^n!}{\gamma_1^n! \dots \gamma_j^n!} \\
&= \sum_{|\beta|=k} j^{\beta^1} \cdot \dots \cdot j^{\beta^n} = \sum_{|\beta|=k} j^{|\beta|} \\
&= j^k \times \#\{(\beta^1, \dots, \beta^n) : \sum_{l=1}^n \beta^l = k, \beta^l \geq 0, 1 \leq l \leq n\} \\
&= \binom{k+n-1}{k} j^k,
\end{aligned}$$

donde hemos expresado los índices de sumación  $\beta, \gamma_l \in \mathbb{N}^n$  como  $\beta = (\beta^1, \dots, \beta^n), \gamma_l = (\gamma_l^1, \dots, \gamma_l^n)$ , con  $1 \leq l \leq j$ . El último paso se deduce por técnicas combinatorias<sup>2</sup>.

□

### Demostración de la estimación (C.2.6)

Se verifica

$$\|\tilde{Q}_2(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq \sum_{|\gamma|=[\alpha]} \|D^\gamma \tilde{Q}_2(q)\|_{\dot{W}^{\beta-[\alpha],2}} \quad (\text{C.2.8})$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{|\gamma|=[\alpha]} \sum_{0 \leq \gamma_0 \leq \gamma} \binom{\gamma}{\gamma_0} \|\tilde{Q}_2(D^{\gamma_0} q, D^{\gamma-\gamma_0} q)\|_{\dot{W}^{\beta-[\alpha],2}} \\
&\leq C(\alpha, \beta, q) \sum_{|\gamma|=[\alpha]} \sum_{0 \leq \gamma_0 \leq \gamma} \binom{\gamma}{\gamma_0} \max\{\|D^{\gamma_0} q\|_{W^{\alpha-[\alpha],2}}^2, \|D^{\gamma-\gamma_0} q\|_{W^{\alpha-[\alpha],2}}^2\}.
\end{aligned} \quad (\text{C.2.9})$$

Pasamos de (C.2.8) a (C.2.9) por la fórmula de integración por partes (C.1.1) y la desigualdad triangular. La última desigualdad se explica por el teorema C.2.1 aplicado a las funciones  $D^{\gamma_0} q, D^{\gamma-\gamma_0} q \in W^{\alpha-[\alpha],2}(\mathbb{R}^2)$ , con  $0 \leq \alpha - [\alpha] < 1$ . Sabiendo que para cada  $\gamma, \gamma_0$

$$\max\{\|D^{\gamma_0} q\|_{W^{\alpha-[\alpha],2}}^2, \|D^{\gamma-\gamma_0} q\|_{W^{\alpha-[\alpha],2}}^2\} \leq \max_{|\gamma| \leq [\alpha]} \|D^\gamma q\|_{W^{\alpha-[\alpha],2}}^2,$$

y que por el lema C.2.2 en el caso  $k = [\alpha], j = 2, n = 2$

$$\sum_{|\gamma|=[\alpha]} \sum_{0 \leq \gamma_0 \leq \gamma} \binom{\gamma}{\gamma_0} = 2^{[\alpha]} (1 + [\alpha]),$$

<sup>2</sup>Es oportuno aquí señalar que el número de soluciones enteras de la ecuación diofántica  $x_1 + \dots + x_k = m$  con las restricciones  $x_j \geq 0, 1 \leq j \leq k$  (entendiendo por solución una lista de enteros  $(x_1, \dots, x_k)$ , todos ellos no negativos, cuya suma vale  $m$ ) coincide con el número de formas distintas de distribuir  $m$  bolas idénticas en  $k$  cajas numeradas.

obtenemos (C.2.6).

□

### Demostración de la estimación (C.2.7)

$$\begin{aligned}
 & \text{Repitiendo el paso de (C.2.8) a (C.2.9) en este caso, tenemos } \|\tilde{Q}_3(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \\
 & \leq \sum_{|\gamma|=[\alpha]} \|D^\gamma \tilde{Q}_3(q)\|_{\dot{W}^{\beta-[\alpha],2}} \\
 & \leq \sum_{|\gamma|=[\alpha]} \sum_{\substack{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3=\gamma \\ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \geq 0}} \frac{\gamma!}{\gamma_1! \gamma_2! \gamma_3!} \|\tilde{Q}_3(D^{\gamma_1}q, D^{\gamma_2}q, D^{\gamma_3}q)\|_{\dot{W}^{\beta-[\alpha],2}} \\
 & \leq C(\alpha, \beta, q) \sum_{|\gamma|=[\alpha]} \sum_{\substack{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3=\gamma \\ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \geq 0}} \frac{\gamma!}{\gamma_1! \gamma_2! \gamma_3!} \left( \sum_{\sigma \in S_3} \|D^{\gamma_{\sigma(1)}}q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|D^{\gamma_{\sigma(2)}}q\|_{L^2} \|D^{\gamma_{\sigma(3)}}q\|_{\dot{W}^{\alpha-[\alpha],2}} \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{\sigma \in S_3} \|D^{\gamma_{\sigma(1)}}q\|_{L^2} \|D^{\gamma_{\sigma(2)}}q\|_{L^2} \|D^{\gamma_{\sigma(3)}}q\|_{\dot{W}^{\alpha-[\alpha],2}} \right),
 \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se desprende del teorema C.2.2 aplicado a las funciones

$$D^{\gamma_1}q, D^{\gamma_2}q, D^{\gamma_3}q \in W^{\alpha-[\alpha],2}(\mathbb{R}^2),$$

cumpléndose  $0 \leq \alpha - [\alpha] < 1$ . Sabiendo que para cualquier  $\gamma \in \mathbb{N}^n$ , se cumple

$$\|D^\gamma q\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}, \|D^\gamma q\|_{L^2}, \|D^\gamma q\|_{\dot{W}^{\alpha-[\alpha],2}} \leq \|D^\gamma q\|_{W^{\alpha-[\alpha],2}},$$

y que por el lema C.2.2 en el caso  $k = [\alpha], j = 3, n = 2$

$$\sum_{|\gamma|=[\alpha]} \sum_{\substack{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3=\gamma \\ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \geq 0}} \frac{\gamma!}{\gamma_1! \gamma_2! \gamma_3!} = 3^{[\alpha]}(1 + [\alpha]),$$

obtenemos (C.2.7).

□

A partir de la estimación (1.5.8) de la proposición 1.5.3 se deduce el siguiente

**Teorema C.2.3.** Sean  $\alpha \in \mathbb{R}$ , con  $0 \leq \alpha < 3/2$ , y  $q_1, q_2 \in W^{\alpha,2}(\mathbb{R}^3)$  funciones de soporte compacto. Entonces  $Q_2(q_1, q_2) \in W^{\beta,2}(\mathbb{R}^3)$ , módulo una función  $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ , para cualquier  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que  $0 \leq \beta < \alpha + \frac{1}{2}$ . Además, para cualquier  $\beta$  así, existe una constante  $C(\alpha, \beta, q_1, q_2) > 0$  que depende de  $\alpha, \beta$  y de los soportes de  $q_1, q_2$  tal que

$$\|\tilde{Q}_2(q_1, q_2)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\alpha, \beta, q_1, q_2) \max\{\|q_1\|_{W^{\alpha,2}}^2, \|q_2\|_{W^{\alpha,2}}^2\}.$$

### Demostración del teorema C.2.3

La demostración del teorema C.2.1 basada en la identidad de polarización

$$\tilde{Q}_2(q_1, q_2) = \frac{1}{4} \left[ \tilde{Q}_2(q_1 + q_2, q_1 + q_2) - \tilde{Q}_2(q_1 - q_2, q_1 - q_2) \right]$$

es válida en este caso con la salvedad de que ahora se aplica la estimación (1.5.8) a las funciones  $q_1 + q_2$ ,  $q_1 - q_2 \in W^{\alpha,2}(\mathbb{R}^3)$ .

□

Siguiendo la pista a las ocurrencias de  $\hat{q}$  en la demostración de la proposición 1.5.4 se puede probar el siguiente

**Teorema C.2.4.** Sean  $\alpha \in \mathbb{R}$ , con  $0 \leq \alpha < 3/2$ , y  $q_1, q_2, q_3 \in W^{\alpha,2}(\mathbb{R}^3)$  funciones de soporte compacto. Entonces  $Q_3(q_1, q_2, q_3) \in W^{\beta,2}(\mathbb{R}^3) + C^\infty(\mathbb{R}^3)$ , para cualquier  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que  $0 \leq \beta < \alpha + 1/2$ . Además, para cualquier  $\beta$  así, existe una constante  $C(\alpha, \beta, q_1, q_2, q_3)$  estrictamente positiva que depende de  $\alpha, \beta$  y de los soportes de  $q_1, q_2, q_3$  tal que

$$\|\tilde{Q}_3(q_1, q_2, q_3)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \quad (C.2.10)$$

$$\leq C(\alpha, \beta, q_1, q_2, q_3) \left( \sum_{\sigma \in S_3} \|q_{\sigma(1)}\|_{L^2} \|q_{\sigma(2)}\|_{L^2} \|q_{\sigma(3)}\|_{\dot{W}^{\alpha,2}} \right. \quad (C.2.11)$$

$$\left. + \sum_{\tau \in S_3} \|q_{\tau(1)}\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q_{\tau(2)}\|_{\dot{W}^{-\varepsilon,2}} \|q_{\tau(3)}\|_{\dot{W}^{\alpha,2}} \right. \quad (C.2.12)$$

$$\left. + \sum_{\omega \in S_3} \|q_{\omega(1)}\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2}-\varepsilon,2}} \|q_{\omega(2)}\|_{L^2} \|q_{\omega(3)}\|_{\dot{W}^{\alpha,2}} \right), \quad (C.2.13)$$

donde  $\varepsilon := \alpha + \frac{1}{2} - \beta > 0$ .

### Idea de la prueba.

Para controlar el término esférico

$$\mathcal{F}(Q'(q_1, q_2, q_3))(\eta) := \frac{1}{|\eta|^2} \int_{\Gamma(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \hat{q}_1(\xi) \hat{q}_3(\eta - \tau) \hat{q}_2(\tau - \xi) d\sigma(\tau) d\sigma(\xi),$$

seguimos los mismos pasos de la demostración para el caso de un sólo potencial del lema 3.2.1 en la sección 3.2.1. En la prueba de este lema introducíamos las definiciones  $Q'_I(q)$ ,  $Q'_{I_k}(q)$ ,  $Q'_{\tilde{I}_k}(q)$ ,  $Q'_{II}(q)$ ,  $Q'_{II_<}(q)$ ,  $Q'_{II_>}(q)$ . Extendemos estas definiciones al caso de tres funciones  $q_1, q_2, q_3$  de manera obvia. Haciendo esto se pierden propiedades de simetría. No podemos afirmar que  $Q'_{I_k}(q_1, q_2, q_3) = Q'_{\tilde{I}_k}(q_1, q_2, q_3)$ , ni  $Q'_{II_<}(q_1, q_2, q_3) = Q'_{II_>}(q_1, q_2, q_3)$ . Más bien se tiene

$$Q'_{I_k}(q_1, q_2, q_3) = Q'_{\tilde{I}_k}(q_3, q_2, q_1), \quad Q'_{II_<}(q_1, q_2, q_3) = Q'_{II_>}(q_3, q_2, q_1).$$

Pero se cumple

$$\|Q'_{I_k}(q_1, q_2, q_3)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C 2^{-k/2} \|q_1\|_{L^2} \|q_3\|_{L^2} \|q_2\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2},2}},$$

$$\|Q'_{\tilde{I}_k}(q_1, q_2, q_3)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} = \|Q'_{I_k}(q_3, q_2, q_1)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C 2^{-k/2} \|q_1\|_{L^2} \|q_3\|_{L^2} \|q_2\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2},2}},$$

y por tanto,

$$\|Q'_I(q_1, q_2, q_3)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C \|q_1\|_{L^2} \|q_3\|_{L^2} \|q_2\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2},2}}.$$

De las estimaciones

$$\begin{aligned} \|Q_{II<}(q_1, q_2, q_3)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} &\leq C (\|q_2\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q_1\|_{\dot{W}^{-\varepsilon,2}} + \|q_2\|_{L^2} \|q_1\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2}-\varepsilon,2}}) \|q_3\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2}+\varepsilon,2}}, \\ \|Q_{II>}(q_1, q_2, q_3)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} &= \|Q_{II<}(q_3, q_2, q_1)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \\ &\leq C (\|q_2\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q_3\|_{\dot{W}^{-\varepsilon,2}} + \|q_2\|_{L^2} \|q_3\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2}-\varepsilon,2}}) \|q_1\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2}+\varepsilon,2}}, \end{aligned}$$

se deduce

$$\begin{aligned} \|Q'_{II}(q_1, q_2, q_3)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} &\leq C (\|q_2\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q_1\|_{\dot{W}^{-\varepsilon,2}} \|q_3\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2}+\varepsilon,2}} \\ &\quad + \|q_2\|_{L^2} \|q_1\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2}-\varepsilon,2}} \|q_3\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2}+\varepsilon,2}} \\ &\quad + \|q_2\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q_3\|_{\dot{W}^{-\varepsilon,2}} \|q_1\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2}+\varepsilon,2}} \\ &\quad + \|q_2\|_{L^2} \|q_3\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2}-\varepsilon,2}} \|q_1\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2}+\varepsilon,2}}). \end{aligned}$$

Por todo ello, la expresión (C.2.11)-(C.2.13) acota la norma de  $Q'(q_1, q_2, q_3)$  en el espacio  $\dot{W}^{\beta,2}$ . Los términos de valor principal se tratan de manera similar.  $\square$

Siguiendo la pista a las ocurrencias de  $\hat{q}$  en la demostración del teorema 1.5.4 se puede probar el siguiente

**Teorema C.2.5.** Sean  $\alpha \in \mathbb{R}$ , con  $0 \leq \alpha < 3/2$ , y  $q_1, q_2, q_3, q_4 \in W^{\alpha,2}(\mathbb{R}^3)$  funciones de soporte compacto. Entonces  $Q_4(q_1, q_2, q_3, q_4) \in W^{\beta,2}(\mathbb{R}^3) + C^\infty(\mathbb{R}^3)$ , para cualquier  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que  $0 \leq \beta < \alpha + 1/2$ . Además, para cualquier  $\beta$  así, existe una constante  $C(\alpha, \beta, q_1, q_2, q_3, q_4) > 0$  que depende de  $\alpha, \beta$  y de los soportes de  $q_1, q_2, q_3, q_4$  tal que

$$\begin{aligned} \|\tilde{Q}_4(q_1, q_2, q_3, q_4)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} &\leq C(\alpha, \beta, q_1, q_2, q_3, q_4) \left( \sum_{\sigma \in S_4} \|q_{\sigma(1)}\|_{L^2} \|q_{\sigma(2)}\|_{L^2} \|q_{\sigma(3)}\|_{L^2} \|q_{\sigma(4)}\|_{\dot{W}^{\alpha,2}} \right. \end{aligned} \quad (C.2.14)$$

$$+ \sum_{\tau \in S_4} \|q_{\tau(1)}\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q_{\tau(2)}\|_{L^2} \|q_{\tau(3)}\|_{L^2} \|q_{\tau(4)}\|_{\dot{W}^{\alpha,2}} \quad (C.2.15)$$

$$+ \sum_{\omega \in S_4} \|q_{\omega(1)}\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}} \|q_{\omega(2)}\|_{\dot{W}^{-\varepsilon,2}} \|q_{\omega(3)}\|_{L^2} \|q_{\omega(4)}\|_{\dot{W}^{\alpha,2}} \quad (C.2.16)$$

$$+ \sum_{\rho \in S_4} \|q_{\rho(1)}\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2}-\varepsilon,2}} \|q_{\rho(2)}\|_{L^2} \|q_{\rho(3)}\|_{L^2} \|q_{\rho(4)}\|_{\dot{W}^{\alpha,2}}), \quad (C.2.17)$$

donde  $\varepsilon := \alpha + \frac{1}{2} - \beta > 0$ .

**Idea de la prueba.**

Para controlar el término esférico

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}(P'(q_1, q_2, q_3, q_4))(\eta) \\ &:= \frac{1}{|\eta|^3} \int_{\Gamma(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \int_{\Gamma(\eta)} \hat{q}_1(\xi) \hat{q}_4(\eta - \tau) \hat{q}_3(\tau - \phi) \hat{q}_2(\phi - \xi) d\sigma(\xi) d\sigma(\tau) d\sigma(\phi), \end{aligned}$$

se siguen las líneas de demostración para el caso de un sólo potencial estudiado en la sección 3.3.1. Si extendemos las definiciones  $P'_I(q)$ ,  $P'_{II}(q)$ ,  $P'_{III}(q)$ ,  $P'_{IV}(q)$ ,  $P'_{IV<}(q)$ ,  $P'_{IV>}(q)$  que allí aparecen al caso de cuatro funciones  $q_1, q_2, q_3, q_4$  se vuelve a perder simetría. Haciendo  $\xi' = \eta - \tau$ ,  $\tau' = \eta - \xi$ ,  $\phi' = \eta - \phi$ , se cumple

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}(P'_{III}(q_1, q_2, q_3, q_4))(\eta) \\
&= \frac{1}{|\eta|^3} \int \int \int_{III(\eta)} \widehat{q}_1(\xi) \widehat{q}_4(\eta - \tau) \widehat{q}_3(\tau - \phi) \widehat{q}_2(\phi - \xi) d\sigma(\xi) d\sigma(\tau) d\sigma(\phi) \\
&= \frac{1}{|\eta|^3} \int \int \int_{III(\eta)} \widehat{q}_1(\eta - \tau') \widehat{q}_4(\xi') \widehat{q}_3(\phi' - \xi') \widehat{q}_2(\tau' - \phi') d\sigma(\tau') d\sigma(\xi') d\sigma(\phi') \\
&= \frac{1}{|\eta|^3} \int \int \int_{II(\eta)} \widehat{q}_1(\eta - \tau') \widehat{q}_4(\xi') \widehat{q}_3(\phi' - \xi') \widehat{q}_2(\tau' - \phi') d\sigma(\xi') d\sigma(\tau') d\sigma(\phi') \\
&= \frac{1}{|\eta|^3} \int \int \int_{II(\eta)} \widehat{q}_4(\xi') \widehat{q}_1(\eta - \tau') \widehat{q}_2(\tau' - \phi') \widehat{q}_3(\phi' - \xi') d\sigma(\xi') d\sigma(\tau') d\sigma(\phi') \\
&= \mathcal{F}(P'_{II}(q_4, q_3, q_2, q_1))(\eta).
\end{aligned}$$

También, aplicando los cambios de variable  $\xi' = \eta - \xi$ ,  $\tau' = \eta - \tau$ ,  $\phi' = \eta - \phi$ , tenemos

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}(P'_{IV>}(q_1, q_2, q_3, q_4))(\eta) \\
&= \frac{1}{|\eta|^3} \int \int \int_{IV>(\eta)} \widehat{q}_1(\xi) \widehat{q}_4(\eta - \tau) \widehat{q}_3(\tau - \phi) \widehat{q}_2(\phi - \xi) d\sigma(\xi) d\sigma(\tau) d\sigma(\phi) \\
&= \frac{1}{|\eta|^3} \int \int \int_{IV<(\eta)} \widehat{q}_1(\eta - \xi') \widehat{q}_4(\tau') \widehat{q}_3(\phi' - \tau') \widehat{q}_2(\xi' - \phi') d\sigma(\xi') d\sigma(\tau') d\sigma(\phi') \\
&= \frac{1}{|\eta|^3} \int \int \int_{IV<(\eta)} \widehat{q}_4(\tau') \widehat{q}_1(\eta - \xi') \widehat{q}_2(\xi' - \phi') \widehat{q}_3(\phi' - \tau') d\sigma(\tau') d\sigma(\xi') d\sigma(\phi') \\
&= \mathcal{F}(P'_{IV<}(q_4, q_3, q_2, q_1))(\eta).
\end{aligned}$$

Pero esto no supone ningún problema para llegar a la tesis del teorema C.2.5. De hecho, las estimaciones

$$\begin{aligned}
\|P'_{II}(q_1, q_2, q_3, q_4)\|_{\dot{W}^{s,2}} &\leq C(\|q_1\|_{L^2} + \|q_1\|_{\dot{W}^{s-\frac{1}{2},2}})\|q_4\|_{L^2}\|q_3\|_{L^2}\|q_2\|_{\dot{W}^{s-\frac{1}{2},2}}, \\
\|P'_{IV<}(q_1, q_2, q_3, q_4)\|_{\dot{W}^{s,2}} &\leq C(\|q_2\|_{\dot{W}^{s-\frac{1}{2},2}}\|q_1\|_{\dot{W}^{s-\varepsilon,2}}\|q_3\|_{L^2}\|q_4\|_{\dot{W}^{s-\frac{1}{2}-\varepsilon,2}} \\
&\quad + \|q_1\|_{\dot{W}^{s-\frac{1}{2}-\varepsilon,2}}\|q_3\|_{L^2}\|q_2\|_{L^2}\|q_4\|_{\dot{W}^{s-\frac{1}{2}-\varepsilon,2}}),
\end{aligned}$$



nos conducen a

$$\begin{aligned}
\|P'_{III}(q_1, q_2, q_3, q_4)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} &= \|P'_{II}(q_4, q_3, q_2, q_1)\| \\
&\leq C(\|q_4\|_{L^2} + \|q_4\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}})\|q_1\|_{L^2}\|q_2\|_{L^2}\|q_3\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2},2}}, \\
\|P'_{IV>}(q_1, q_2, q_3, q_4)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} &= \|P'_{IV<}(q_4, q_3, q_2, q_1)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \\
&\leq C(\|q_3\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}\|q_4\|_{\dot{W}^{-\epsilon,2}}\|q_2\|_{L^2}\|q_1\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2}+\epsilon,2}} \\
&\quad + \|q_4\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2}-\epsilon,2}}\|q_3\|_{L^2}\|q_2\|_{L^2}\|q_1\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2}+\epsilon,2}}), \\
\|P'_{IV}(q_1, q_2, q_3, q_4)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} &\leq C(\|q_2\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}\|q_1\|_{\dot{W}^{-\epsilon,2}}\|q_3\|_{L^2}\|q_4\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2}+\epsilon,2}} \\
&\quad + \|q_1\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2}-\epsilon,2}}\|q_3\|_{L^2}\|q_2\|_{L^2}\|q_4\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2}+\epsilon,2}} \\
&\quad + \|q_3\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}\|q_4\|_{\dot{W}^{-\epsilon,2}}\|q_2\|_{L^2}\|q_1\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2}+\epsilon,2}} \\
&\quad + \|q_4\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2}-\epsilon,2}}\|q_3\|_{L^2}\|q_2\|_{L^2}\|q_1\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2}+\epsilon,2}}).
\end{aligned}$$

También se cumple

$$\begin{aligned}
\|P'_I(q_1, q_2, q_3, q_4)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} &\leq C(\|q_1\|_{L^2}\|q_2\|_{L^2}\|q_4\|_{L^2}\|q_3\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2},2}} \\
&\quad + \|q_1\|_{\dot{W}^{-\frac{1}{2},2}}\|q_4\|_{L^2}\|q_3\|_{L^2}\|q_2\|_{\dot{W}^{\beta-\frac{1}{2},2}}),
\end{aligned}$$

El tratamiento de los términos de valor principal nos conduce a estimaciones del mismo tipo. De todo ello se concluye que efectivamente la expresión (C.2.14)-(C.2.17) acota la norma de  $\tilde{Q}_4(q_1, q_2, q_3, q_4)$  en el espacio  $\dot{W}^{\beta,2}$ . □

Para  $\alpha$  y  $q$  como en el teorema 1.0.1 con  $n = 3$ , aplicando la fórmula de integración por partes (C.1.1) y como consecuencia de los teoremas C.2.3, C.2.4 y C.2.5 se demuestran las siguientes estimaciones en 3d

$$\|\tilde{Q}_2(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\alpha, \beta, q) \max_{|\gamma| \leq [\alpha]} \|D^\gamma q\|_{W^{\alpha-|\alpha|,2}}^2, \quad (C.2.18)$$

$$\|\tilde{Q}_3(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\alpha, \beta, q) \max_{|\gamma| \leq [\alpha]} \|D^\gamma q\|_{W^{\alpha-|\alpha|,2}}^3, \quad (C.2.19)$$

$$\|\tilde{Q}_4(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\alpha, \beta, q) \max_{|\gamma| \leq [\alpha]} \|D^\gamma q\|_{W^{\alpha-|\alpha|,2}}^4, \quad (C.2.20)$$

donde la constante  $C(\alpha, \beta, q) > 0$  depende únicamente de  $\alpha, \beta$  y el soporte de  $q$ . Estas expresiones se obtienen de manera idéntica a como procedimos en dimensión 2 para deducir las expresiones (C.2.6), (C.2.7).

Siguiendo las líneas de demostración de la proposición 4.1.1, vamos a probar la siguiente

**Proposición C.2.1.** Sean  $n \in \{2, 3\}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $0 \leq \alpha < n/2$ ,  $q_1, \dots, q_j \in W^{\alpha,2}(\mathbb{R}^n)$  funciones de soporte compacto y  $C_0 > 1$ . Entonces, para cualquier  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que  $\beta < \alpha + \frac{1}{2}$ :

$$\|\tilde{Q}_j(q_1, \dots, q_j)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\alpha, \beta) C_0^{15/4} \left( 2C_0^{-\frac{1}{4}} \max_{1 \leq i \leq j} \|q_i\|_{W^{\alpha,2}} \right)^j, \quad (C.2.21)$$

donde  $j \geq 4$  si  $n = 2$  y  $j \geq 5$  si  $n = 3$ .

**Demostración.** Pasando a las coordenadas polares  $\xi = -2k\theta$ ,  $k \geq 0$ ,  $\theta \in S^{n-1}$ , en la integral

$$\|\tilde{Q}_j(q_1, \dots, q_j)\|_{\dot{W}^{\tau,2}}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2\tau} \left| \mathcal{F} \left( \tilde{Q}_j(q_1, \dots, q_j) \right) (\xi) \right|^2 d\xi,$$

y siguiendo los mismos pasos que en la demostración de la proposición 1.5.1 para llegar a la fórmula (4.1.2), se obtiene

$$\|\tilde{Q}_j(q)\|_{\dot{W}^{\tau,2}} \leq C \frac{2^\tau}{\sqrt{\beta_j - \tau}} \left( \frac{C_0}{2} \right)^{\tau - \beta_j} \|q_1\|_{L^2} \prod_{l=2}^j \|q_l\|_{W^{\alpha,2}}, \quad (\text{C.2.22})$$

para todo  $\tau \in \mathbb{R}$  tal que  $\tau < \beta_j$ , donde  $\beta_j$  se definió en (1.5.1).

Sea  $\varepsilon = \varepsilon(\alpha, \beta) := (\alpha + \frac{1}{2}) - \beta > 0$ . Puesto que  $2\beta = 2(\beta_j - \varepsilon) + 2(\alpha + \frac{1}{2} - \beta_j)$ , y ya que  $\alpha + \frac{1}{2} \leq \beta_j$ , para el  $j$  del enunciado, tenemos

$$\begin{aligned} \|\tilde{Q}_j(q_1, \dots, q_j)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} &= \left[ \int_{|\xi| > C_0} |\xi|^{2\beta} |\mathcal{F}(Q_j(q_1, \dots, q_j))(\xi)|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_0^{\alpha + \frac{1}{2} - \beta_j} \left[ \int_{|\xi| > C_0} |\xi|^{2(\beta_j - \varepsilon)} |\mathcal{F}(Q_j(q_1, \dots, q_j))(\xi)|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= C_0^{\alpha + \frac{1}{2} - \beta_j} \|\tilde{Q}_j(q_1, \dots, q_j)\|_{\dot{W}^{\beta_j - \varepsilon,2}} \\ &\leq C C_0^{\alpha + \frac{1}{2} - \beta_j} \frac{2^{\beta_j - \varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}} \left( \frac{C_0}{2} \right)^{-\varepsilon} \|q_1\|_{L^2} \prod_{l=2}^j \|q_l\|_{W^{\alpha,2}} \\ &= C(\alpha, \beta) 2^{\beta_j} C_0^{\beta - \beta_j} \|q_1\|_{L^2} \prod_{l=2}^j \|q_l\|_{W^{\alpha,2}}, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se desprende de la fórmula (C.2.22) en el caso  $t = \beta_j - \varepsilon$ . Ya observamos en la prueba de la proposición 4.1.1 que  $\beta - \beta_j \leq -\frac{1}{4}j + \frac{15}{4}$ , y que  $2^{\beta_j} \leq 2^j$ . Se cumple

$$\|q_1\|_{L^2} \prod_{l=2}^j \|q_l\|_{W^{\alpha,2}} \leq \max_{1 \leq l \leq j} \|q_l\|_{W^{\alpha,2}}^j.$$

De todo ello se deduce (C.2.21). □

Sean  $\alpha$  y  $q$  como en el teorema 1.0.1 y  $j \geq 4$  si  $n = 2$ , y  $j \geq 5$  si  $n = 3$ . Para todo  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que  $\beta < \alpha + \frac{1}{2}$ , afirmamos que

$$\|\tilde{Q}_j(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq C(\alpha, \beta, n, C_0) j^{[\alpha]} \left( 2C_0^{-\frac{1}{4}} \max_{|\gamma| \leq [\alpha]} \|D^\gamma q\|_{W^{\alpha - [\alpha],2}} \right)^j. \quad (\text{C.2.23})$$

**Demostración de la estimación (C.2.23)**

Repitiendo el argumento usado en (C.2.8), (C.2.9), tenemos

$$\|\tilde{Q}_j(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}} \leq \sum_{|\gamma| = [\alpha]} \|D^\gamma \tilde{Q}_j(q)\|_{\dot{W}^{\beta - [\alpha],2}}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{|\gamma|=[\alpha]} \sum_{\substack{\gamma_1+\dots+\gamma_j=\gamma \\ \gamma_1, \dots, \gamma_j \geq 0}} \frac{\gamma!}{\gamma_1! \dots \gamma_j!} \|\tilde{Q}_j(D^{\gamma_1}q, \dots, D^{\gamma_j}q)\|_{\dot{W}^{\beta-[\alpha],2}} \\
&\leq \sum_{|\gamma|=[\alpha]} \sum_{\substack{\gamma_1+\dots+\gamma_j=\gamma \\ \gamma_1, \dots, \gamma_j \geq 0}} \frac{\gamma!}{\gamma_1! \dots \gamma_j!} C(\alpha, \beta) C_0^{\frac{15}{4}} \left( 2C_0^{-\frac{1}{4}} \max_{1 \leq l \leq j} \|D^{\gamma_l}q\|_{W^{\alpha-[\alpha],2}} \right)^j.
\end{aligned}$$

La estimación (C.2.21) de la proposición C.2.1 explica la desigualdad de la última línea, teniendo presente que las funciones  $D^{\gamma_1}q, \dots, D^{\gamma_j}q \in W^{\alpha-[\alpha],2}(\mathbb{R}^n)$  son de soporte compacto y que  $\beta - [\alpha] < (\alpha - [\alpha]) + \frac{1}{2}$ , con  $0 \leq \alpha - [\alpha] < 1 \leq n/2$ . Por el lema C.2.2 aplicado al caso  $k = [\alpha]$ , se tiene

$$\sum_{|\gamma|=[\alpha]} \sum_{\substack{\gamma_1+\dots+\gamma_j=\gamma \\ \gamma_1, \dots, \gamma_j \geq 0}} \frac{\gamma!}{\gamma_1! \dots \gamma_j!} = \binom{[\alpha] + n - 1}{[\alpha]} j^{[\alpha]}.$$

Finalmente deducimos la estimación (C.2.23), para cierta constante  $C(\alpha, \beta, n, C_0) > 0$  que sólo depende de  $\alpha, \beta, n, C_0$ .

□

Ya estamos en condiciones de demostrar el teorema concluyente de esta memoria.

### Demostración del teorema 1.0.1

Sabemos que

$$q_B - q = \sum_{j=2}^{\infty} \tilde{Q}_j(q) + \mathcal{F}^{-1} \left( (1 - \chi^*) \widehat{q_B - q} \right),$$

donde  $\mathcal{F}^{-1} \left( (1 - \chi^*) \widehat{q_B - q} \right) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Si  $C_0 > \left( 2 \max_{|\gamma| \leq [\alpha]} \|D^\gamma q\|_{W^{\alpha-[\alpha],2}} \right)^4$  la serie

$$\sum_{j=k}^{+\infty} j^{[\alpha]} \left( 2C_0^{-\frac{1}{4}} \max_{|\gamma| \leq [\alpha]} \|D^\gamma q\|_{W^{\alpha-[\alpha],2}} \right)^j$$

converge para cualquier  $k \in \mathbb{Z}$ . Por la afirmación (C.2.23), las series  $\sum_{j=4}^{+\infty} \|\tilde{Q}_j(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}$ ,

$\sum_{j=5}^{+\infty} \|\tilde{Q}_j(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}$  convergen para  $n = 2$  y  $n = 3$ , respectivamente. Si  $C_0 > 1000$  se cumplen

las estimaciones para  $\|\tilde{Q}_2(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}$ ,  $\|\tilde{Q}_3(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}$  en 2d dadas por (C.2.6), (C.2.7), así como las estimaciones para  $\|\tilde{Q}_2(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}$ ,  $\|\tilde{Q}_3(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}$ ,  $\|\tilde{Q}_4(q)\|_{\dot{W}^{\beta,2}}$  en 3d dadas por (C.2.18), (C.2.19), (C.2.20). Por todo ello, tomando

$$C_0 := \max \left\{ 10000, \left( 2 \max_{|\gamma| \leq [\alpha]} \|D^\gamma q\|_{W^{\alpha-[\alpha],2}} \right)^4 \right\} + 1,$$

se garantiza que la serie  $\sum_{j=2}^{\infty} \tilde{Q}_j(q)$  converja en el espacio  $W^{\beta,2}(\mathbb{R}^n)$ , para todo  $\beta < \alpha + 1/2$ .

□

## Apéndice D

# Producto de espacios de Sobolev

En este apéndice demostraremos la estimación producto de espacios de Sobolev dada por la proposición D.3, que enunciamos más abajo. Este resultado aplicado con los pesos adecuados que aparecían en la estimación de la resolvente (1.2.8) (véase la subsección 1.2.1), junto con dicha estimación, permite obtener las estimaciones del término  $j$ -ésimo de la serie de Neumann-Born estudiadas en el capítulo 4.

Empezamos introduciendo la siguiente proposición (véase [CW]) cuya demostración se basa en el análisis de Littlewood-Paley haciendo uso de los paraproductos de Bony y en estimaciones conocidas para el operador maximal de Hardy-Littlewood.

**Proposición D.1.** *Sean  $\alpha > 0$ ,  $1 < p < \infty$ . Entonces*

$$\|fg\|_{W^{\alpha,p}} \leq C (\|f\|_{L^{q_1}} \|g\|_{W^{\alpha,q_2}} + \|g\|_{L^{r_1}} \|f\|_{W^{\alpha,r_2}}), \quad (\text{D.0.1})$$

donde

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}, \quad q_2, r_2 \in (1, \infty), \quad q_1, r_1 \in (1, \infty].$$

**Nota.** Existe un resultado más preciso (véase el teorema A.8 en [KPV2]): Sea  $0 < \alpha < 1$ . Entonces

$$D^\alpha(fg) = gD^\alpha f + fD^\alpha g + E,$$

donde para todos  $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, \alpha)$  y  $p, q_1, q_2$  tales que  $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$  y  $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{p}$  se verifica

$$\|E\|_{L^p} \leq \|D^{\alpha_1} f\|_{L^{q_1}} \|D^{\alpha_2} g\|_{L^{q_2}}.$$

Como consecuencia de la proposición D.1 se obtiene la siguiente estimación sobre productos de espacios de Sobolev debida a Zolesio (consúltense [G] y la sección §3.5 en [T1]).

**Proposición D.2.** *Sean  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0$ ,  $\alpha_3 \leq \alpha_1$ ,  $\alpha_3 \leq \alpha_2$  y  $p_1, p_2, p$  tales que*

$$\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 \geq n\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p}\right) \geq 0,$$

y  $p_j > p$ ,  $j = 1, 2$ . Entonces

$$\|fg\|_{W^{\alpha_3, p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{W^{\alpha_1, p_1}(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{W^{\alpha_2, p_2}(\mathbb{R}^n)}. \quad (\text{D.0.2})$$

En todos los casos en que aplicamos esta estimación producto una de las funciones tiene soporte compacto. Este hecho nos permite aplicar la estimación producto con los pesos que aparecen en la estimación de la resolvente del laplaciano dada por la proposición 1.2.1. De hecho, se tiene la siguiente

**Proposición D.3.** Sean  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, p_1, p_2, p$  como en la proposición D.2. Supongamos que  $f$  tiene soporte compacto. Sean  $\gamma, \gamma' \in \mathbb{R}$ . Entonces

$$\|fg\|_{W^{\alpha_3, p}_{\gamma'}(\mathbb{R}^n)} \leq C(spt f, \gamma, \gamma') \|f\|_{W^{\alpha_1, p_1}(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{W^{\alpha_2, p_2}_{\gamma}(\mathbb{R}^n)}.$$

Antes de demostrar la proposición D.2 conviene recordar el teorema de inmersión de Sobolev.

**Definición.** Dados dos espacios de Banach  $(X, \|\cdot\|_X)$ ,  $(Y, \|\cdot\|_Y)$ , se dice que  $X$  se sumerge continuamente en  $Y$  si  $X \subset Y$  y la inclusión  $i: X \rightarrow Y$  es continua, esto es, existe una constante  $C > 0$  tal que para todo  $x \in X$ ,

$$\|x\|_Y \leq C \|x\|_X.$$

**Teorema D.1.** Sean  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $1 < p < \infty$ .

(i) Supongamos que  $0 < \alpha < \frac{n}{p}$ . Entonces el espacio de Sobolev  $W^{\alpha, p}(\mathbb{R}^n)$  se sumerge de manera continua en  $L^q(\mathbb{R}^n)$  siempre que

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}.$$

(ii) Supongamos que  $0 < \alpha = \frac{n}{p}$ . Entonces  $W^{\alpha, p}(\mathbb{R}^n)$  se sumerge de manera continua en  $L^q(\mathbb{R}^n)$  si  $\frac{n}{\alpha} < q < \infty$ .

(iii) Si  $\frac{n}{p} < \alpha < \infty$  entonces toda función de  $W^{\alpha, p}(\mathbb{R}^n)$  puede modificarse en un conjunto de medida cero de manera que la función resultante sea uniformemente continua.

**Nota D.1.** De la parte (i) del teorema D.1 también se desprende que si  $\alpha < \alpha'$  y  $\alpha' - \alpha < \frac{n}{p}$  el espacio  $W^{\alpha', p}(\mathbb{R}^n)$  se sumerge de manera continua en  $W^{\alpha, q}(\mathbb{R}^n)$ , donde

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha' - \alpha}{n}.$$

## Demostración de la proposición D.2

Nos limitaremos al caso peor donde la diferencia  $\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$  es mínima:

$$\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = n\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p}\right) \geq 0.$$

Suponemos en primer lugar que  $\alpha_1 \leq \alpha_2$ . Por la nota D.1,

$$\|f g\|_{W^{\alpha_3, p}} \leq C \|f g\|_{W^{\alpha_1, p_0}},$$

donde  $\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p} = \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{n}$ . Por la proposición D.1, existen  $q_2, r_2 \in (1, \infty)$ ,  $q_1, r_1 \in (1, \infty]$  tales que

$$\frac{1}{p_0} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2},$$

y además,

$$\|f g\|_{W^{\alpha_1, p_0}} \leq C (\|f\|_{L^{q_1}} \|g\|_{W^{\alpha_1, q_2}} + \|g\|_{L^{r_1}} \|f\|_{W^{\alpha_1, r_2}}).$$

Elegimos  $q_1, q_2, r_1$  y  $r_2 = p_1$  tales que

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} &= \frac{\alpha_1}{n}, \\ \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2} &= \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{n}, \\ \frac{1}{p_2} - \frac{1}{r_1} &= \frac{\alpha_2}{n}. \end{aligned}$$

Por la parte (i) del teorema D.1 y la nota D.1,

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^{q_1}} &\leq C \|f\|_{W^{\alpha_1, p_1}}, \quad \|g\|_{W^{\alpha_1, q_2}} \leq C \|g\|_{W^{\alpha_2, p_2}}, \\ \|g\|_{L^{r_1}} &\leq C \|g\|_{W^{\alpha_2, p_2}}, \quad \|f\|_{W^{\alpha_1, r_2}} \leq C \|f\|_{W^{\alpha_1, p_1}}, \end{aligned}$$

obteniéndose (D.0.2). Si  $\alpha_2 \leq \alpha_1$  hacemos

$$\begin{aligned} \|f g\|_{W^{\alpha_3, p}} &\leq C \|f g\|_{W^{\alpha_2, p_0}} \\ &\leq C (\|f\|_{L^{q_1}} \|g\|_{W^{\alpha_2, q_2}} + \|g\|_{L^{r_1}} \|f\|_{W^{\alpha_2, r_2}}) \\ &\leq C \|f\|_{W^{\alpha_1, p_1}} \|g\|_{W^{\alpha_2, p_2}}, \end{aligned}$$

donde  $\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p} = \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{n}$ , y se eligen  $q_1, q_2 = p_2, r_1, r_2$  tales que

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_0} &= \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}, \\ \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} &= \frac{\alpha_1}{n}, \\ \frac{1}{p_1} - \frac{1}{r_2} &= \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{n}, \\ \frac{1}{p_2} - \frac{1}{r_1} &= \frac{\alpha_2}{n}. \end{aligned}$$

La constante en (D.0.2) depende de  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  debido a la influencia de las constantes que aparecen en las inmersiones de Sobolev, pero omitimos tal dependencia por claridad.  $\square$

La proposición D.3 se sigue de la proposición D.2 y del siguiente

**Lema D.1.** Sean  $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Definimos el operador de multiplicación  $T_\zeta(f) := \zeta f$ . Sean  $\gamma, \gamma'$  números reales cualesquiera. Entonces  $T_\zeta$  admite una extensión acotada de  $W_\gamma^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$  en  $W_{\gamma'}^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ .

### Demostración del lema D.1

Empecemos por el caso  $\alpha = 1$ . Se cumple

$$\begin{aligned} \|T_\zeta(f)\|_{W_{\gamma'}^{1,p}} &= \|\Lambda^1(\zeta f)\|_{L_{\gamma'}^p} \leq C \left[ \|\zeta f\|_{L_\gamma^p} + \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial(\zeta f)}{\partial x_j} \right\|_{L_{\gamma'}^p} \right] \\ &= \|\zeta f\|_{L_{\gamma'}^p} + \sum_{j=1}^n \left\| f \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} + \zeta \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_{L_{\gamma'}^p}, \end{aligned}$$

y sabiendo que  $\zeta$  es función de Schwartz,

$$\begin{aligned} \|\zeta f\|_{L_{\gamma'}^p} &= \|\zeta(\cdot) f(\cdot) (1 + |\cdot|)^{\gamma'}\|_{L^p} = \|\zeta(\cdot) (1 + |\cdot|)^{\gamma' - \gamma} f(\cdot) (1 + |\cdot|)^\gamma\|_{L^p} \\ &\leq \|\zeta(\cdot) (1 + |\cdot|)^{\gamma' - \gamma}\|_{L^\infty} \|f\|_{L_\gamma^p} = C(\zeta, \gamma, \gamma') \|f\|_{L_\gamma^p}. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} \left\| f \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} \right\|_{L_{\gamma'}^p} &= \left\| (1 + |\cdot|)^{\gamma' - \gamma} \frac{\partial \zeta(\cdot)}{\partial x_j} f (1 + |\cdot|)^\gamma \right\|_{L^p} \\ &\leq \left\| (1 + |\cdot|)^{\gamma' - \gamma} \frac{\partial \zeta(\cdot)}{\partial x_j} \right\|_{L^\infty} \|f\|_{L_\gamma^p} \\ &= C(D\zeta, \gamma, \gamma') \|f\|_{L_\gamma^p}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \left\| \zeta \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_{L_{\gamma'}^p} &= \left\| \zeta(\cdot) (1 + |\cdot|)^{\gamma' - \gamma} \frac{\partial f(\cdot)}{\partial x_j} (1 + |\cdot|)^\gamma \right\|_{L^p} \\ &\leq C(\zeta, \gamma, \gamma') \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_{L_\gamma^p}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \|T_\zeta(f)\|_{W_{\gamma'}^{1,p}} &\leq C(\zeta, D\zeta, \gamma, \gamma') \left[ \|f\|_{L_\gamma^p} + \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_{L_\gamma^p} \right] \\ &\leq C(\zeta, D\zeta, \gamma, \gamma') \|\Lambda^1 f\|_{L_\gamma^p} \\ &= C(\zeta, D\zeta, \gamma, \gamma') \|f\|_{W_\gamma^{1,p}}. \end{aligned}$$

A continuación vamos con el caso  $\alpha = 0$ . Veamos que  $T_\zeta : L_\gamma^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_{\gamma'}^p(\mathbb{R}^n)$ :

$$\|T_\zeta(f)\|_{L_{\gamma'}^p} = \|\zeta(\cdot) (1 + |\cdot|)^{\gamma' - \gamma} f(\cdot) (1 + |\cdot|)^\gamma\|_{L^p}$$

$$\begin{aligned} &\leq \|\zeta(\cdot) (1 + |\cdot|)^{\gamma' - \gamma}\|_{L^\infty} \|f\|_{L_\gamma^p} \\ &= C(\zeta, \gamma, \gamma') \|f\|_{L_\gamma^p}. \end{aligned}$$

En virtud del método de interpolación compleja, a partir de las estimaciones

$$\begin{aligned} \|T_\zeta(f)\|_{W_\gamma^{1,p}} &\leq \tilde{C}_1(\zeta, D\zeta, \gamma, \gamma') \|f\|_{W_\gamma^{1,p}}, \\ \|T_\zeta(f)\|_{L_\gamma^p} &\leq \tilde{C}_2(\zeta, \gamma, \gamma') \|f\|_{L_\gamma^p}, \end{aligned}$$

se obtiene para todo  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,

$$\|T_\zeta(f)\|_{W_\gamma^{\alpha,p}} \leq [\tilde{C}_1(\zeta, D\zeta, \gamma, \gamma')]^\alpha [\tilde{C}_2(\zeta, \gamma, \gamma')]^{1-\alpha} \|f\|_{W_\gamma^{\alpha,p}}.$$

De hecho, el espacio interpolado complejo  $(L_\gamma^p, W_\gamma^{1,p})_{[\theta]}$  coincide con  $W_\gamma^{\theta,p}$ , donde  $0 \leq \theta \leq 1$ .  $\square$

### Demostración de la proposición D.3

Sea  $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\zeta \equiv 1$  en  $\text{spt } f$ . Téngase en cuenta que la elección de  $\zeta$  está condicionada por el soporte de  $f$ . El resultado se sigue de la proposición D.2 y del lema D.1, como se observa en el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} \|fg\|_{W_\gamma^{\alpha_3,p}} &= \|\zeta(fg)\|_{W_\gamma^{\alpha_3,p}} \leq C(\text{spt } f, \gamma') \|fg\|_{W^{\alpha_3,p}} \\ &= C(\text{spt } f, \gamma') \|f(\zeta g)\|_{W^{\alpha_3,p}} \\ &\leq C(\text{spt } f, \gamma') \|f\|_{W^{\alpha_1,p_1}} \|\zeta g\|_{W^{\alpha_2,p_2}} \\ &\leq C(\text{spt } f, \gamma', \gamma) \|f\|_{W^{\alpha_1,p_1}} \|g\|_{W_\gamma^{\alpha_2,p_2}}, \end{aligned}$$

donde omitimos en las constantes la dependencia de  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  por claridad.  $\square$

Enunciamos la versión vectorial del teorema de Calderón-Zygmund para integrales singulares.

**Teorema D.2.** Sean  $A, B$  espacios de Banach y  $T$  un operador que manda  $L_0^\infty(A)$  en la clase de las funciones medibles a valores en  $B$ , que admite una extensión acotada de  $L^r(A)$  en  $L^r(B)$  para algún  $r \in (1, \infty]$ . Sea  $K : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathcal{L}(A, B)$  una función medible y localmente integrable fuera del origen (es decir, la integral de  $\|K(x)\|_{\mathcal{L}(A,B)}$  en los compactos de  $\mathbb{R}^n$  que no contienen al origen es finita). Supongamos que  $T$  está asociado al núcleo de convolución  $K$ , esto es que para toda  $f \in L_0^\infty(A)$  y todo  $x \notin \text{spt } f$  se verifica

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y) \cdot f(y) dy.$$

Si el núcleo satisface la condición de Hörmander vectorial

$$\int_{|x|>2|y|} \|K(x-y) - K(x)\|_{\mathcal{L}(A,B)} dx \leq C, \quad y \neq 0,$$



entonces  $T$  se extiende como operador acotado de  $L^p(A)$  en  $L^p(B)$ , si  $1 < p < \infty$ , y también admite una extensión que manda  $L^1(A)$  en  $L^{1,\infty}(B)$ .

**Definición D.1.** Sea  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  una función de corte tal que  $\phi \geq 0$ , y

$$\phi(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{si } |\xi| \leq 1, \\ 0, & \text{si } |\xi| \geq 2. \end{cases}$$

Escribimos  $\psi(\xi) := \phi(\xi) - \phi(2\xi)$ . Las funciones  $\mathcal{F}^{-1}\psi$ ,  $\widehat{\psi}$  tienen media cero ya que  $\psi(0) = 0$ . Definimos

$$\begin{aligned} \phi_k(\xi) &:= \phi(2^{-k}\xi), \quad k \geq 0, \\ \psi_k(\xi) &:= \psi(2^{-k}\xi), \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Nótese que  $\psi_k(\xi) = \psi_1(2^{-k+1}\xi)$ ,  $k \geq 1$ . Aplicando la identidad  $\psi(\xi) := \phi(\xi) - \phi(2\xi)$ , se tiene

$$\begin{aligned} \phi_k(\xi) &= \psi(2^{-k}\xi) + \phi(2^{-k+1}\xi) = \psi(2^{-k}\xi) + \psi(2^{-k+1}\xi) + \phi(2^{-k+2}\xi) \\ &= \dots = \psi_k(\xi) + \psi_{k-1}(\xi) + \dots + \psi_1(\xi) + \phi(\xi). \end{aligned}$$

Luego, podemos escribir

$$\phi_k(\xi) = \sum_{j=1}^k \psi_j(\xi) + \phi(\xi) = \sum_{j=0}^k \psi_j(\xi),$$

con la notación  $\psi_0 = \phi$ . Y se verifica

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k = 1 \quad \text{en } \mathbb{R}^n.$$

Obsérvese que las funciones  $\psi_k$ ,  $\phi_k$  están soportadas en anillos diádicos y bolas diádicas, respectivamente:  $\text{spt } \psi_k = \Delta_k$ ,  $k \geq 1$ ,  $\text{spt } \phi_k = B_{2^{k+1}}$ ,  $k \geq 0$ . Además

$$\begin{aligned} \psi_k(\xi) &= \begin{cases} 0, & \text{si } |\xi| \in [0, 2^{k-1}] \cup [2^{k+1}, \infty), \\ 1 - \phi_{k-1}(\xi), & \text{si } |\xi| \in [2^{k-1}, 2^k], \\ \phi_k(\xi), & \text{si } |\xi| \in [2^k, 2^{k+1}], \end{cases} \quad (k \geq 1) \\ \phi_k(\xi) &= \begin{cases} 1, & \text{si } |\xi| \leq 2^k, \\ 0, & \text{si } |\xi| \geq 2^{k+1}. \end{cases} \quad (k \geq 0). \end{aligned}$$

Definimos una *partición de la unidad de Littlewood-Paley* como la sucesión de funciones  $\{\psi_k : k \geq 0\}$ .

**Definición D.2.** Manteniendo las notaciones de la definición D.1, para  $f, g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$  se define el *paraproducto de Bony* de  $f$  y  $g$  como

$$T_f g := \sum_{k \geq 0} \phi_k(D) f \psi_{k+6}(D) g. \quad (\text{D.0.3})$$

Utilizaremos los siguientes resultados que se enmarcan en la teoría de Littlewood-Paley. El primero se refiere a funciones cuya transformada de Fourier está soportada en anillos diádicos y en el otro las funciones en el lado de Fourier están soportadas en bolas diádicas.

**Lema D.2.** *Supongamos que  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $\text{spt } \widehat{f_k} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : B_0 2^{k-1} \leq |\xi| \leq B_1 2^{k+1}\}$ , para ciertas constantes positivas  $B_0, B_1$  y  $k \geq 0$ . Entonces*

$$\left\| \sum_{k \geq 0} f_k \right\|_{W^{\alpha,p}} \leq C \left\| \left( \sum_{k \geq 0} 2^{2k\alpha} |f_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p}. \quad (\text{D.0.4})$$

Si  $f_k = \psi_k(D)f$ , para alguna  $f$ , la desigualdad inversa también se cumple.

**Lema D.3.** *Supongamos que  $\alpha > 0$  y  $\text{spt } \widehat{f_k} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq B 2^k\}$ , para cierta constante  $B > 0$  y  $k \geq 0$ . Entonces se cumple (D.0.4).*

### Demostración del lema D.2

Empecemos por probar la desigualdad inversa con  $f_k = \psi_k(D)f$ , para cierta  $f$ , suponiendo cierta la expresión (D.0.4). Para ello, tenemos que demostrar la estimación

$$\left\| \left( \sum_{k \geq 0} 2^{2k\alpha} |\Lambda^{-\alpha} \psi_k(D)f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p}. \quad (\text{D.0.5})$$

Definimos el operador  $T$  que manda funciones de  $L_0^\infty$  en la clase de las funciones medibles  $l^2$ -valoradas como sigue:

$$Tf(x) := (g_k(x))_{k \geq 0}, \quad (\text{D.0.6})$$

donde  $g_k(x) = 2^{k\alpha} \Lambda^{-\alpha} \psi_k(D)f(x)$ . Este operador está asociado al núcleo de convolución

$$K(x) = (2^{k\alpha} \mathcal{F}^{-1}(\langle \cdot \rangle^{-\alpha} \psi_k(\cdot))(x))_{k \geq 0}, \quad (\text{D.0.7})$$

donde  $K$  está en las hipótesis del teorema D.2 para  $A = \mathbb{C}$  y  $B = l^2$ , como veremos a continuación. La condición

$$\|\nabla K(x)\|_{\mathcal{L}(A,B)} \leq \frac{C}{|x|^{n+1}}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

es más fuerte que la de Hörmander. Sea  $m_k(\xi) := 2^{k\alpha} \langle \xi \rangle^{-\alpha} \psi_k(\xi)$ . Si  $\xi \notin \Delta_k$  es obvio que

$$|D^\gamma m_k(\xi)| \leq C |\xi|^{-|\gamma|}, \quad (\text{D.0.8})$$

para todo multi-índice  $\gamma \in \mathbb{N}^n$ . Supongamos que  $\xi \in \Delta_k$ . Se cumple

$$D^\gamma m_k(\xi) = 2^{k\alpha} \sum_{\substack{0 \leq \gamma_0 \leq \gamma \\ \gamma_0 \in \mathbb{N}^n}} \binom{\gamma}{\gamma_0} D^{\gamma_0} \langle \xi \rangle^{-\alpha} D^{\gamma-\gamma_0} \psi_k(\xi),$$

donde  $|D^{\gamma_0} \langle \xi \rangle^{-\alpha}| \leq C |\xi|^{-\alpha-|\gamma_0|}$ , y

$$|D^{\gamma-\gamma_0} \psi_k(\xi)| = 2^{-k|\gamma-\gamma_0|} |(D^{\gamma-\gamma_0} \psi)(2^{-k}\xi)| \leq C 2^{-k(|\gamma|-|\gamma_0|)}.$$

ya que  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} |D^\gamma m_k(\xi)| &\leq C 2^{k\alpha} \sum_{0 \leq \gamma_0 \leq \gamma} \binom{\gamma}{\gamma_0} |\xi|^{-\alpha-|\gamma_0|} 2^{-k(|\gamma|-|\gamma_0|)} \\ &\leq C |\xi|^\alpha \sum_{0 \leq \gamma_0 \leq \gamma} \binom{\gamma}{\gamma_0} |\xi|^{-\alpha-|\gamma_0|} |\xi|^{|\gamma_0|-|\gamma|} \\ &= C |\xi|^\alpha \sum_{0 \leq \gamma_0 \leq \gamma} \binom{\gamma}{\gamma_0} |\xi|^{-\alpha-|\gamma|} = C 2^{|\gamma|} |\xi|^{-|\gamma|}. \end{aligned}$$

Para  $1 \leq j \leq n$ , se verifica

$$D^\gamma(\xi_j m_k(\xi)) = \begin{cases} \xi_j D^\gamma m_k(\xi), & \text{si } \gamma_j = 0, \\ \xi_j D^\gamma m_k(\xi) + D^{\gamma-e_j} m_k(\xi), & \text{si } \gamma_j > 0, \end{cases}$$

donde  $e_j = (0, \dots, \overbrace{1}^j, \dots, 0)$ ,  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ . Aplicando (D.0.8) deducimos

$$|D^\gamma((\cdot)_j m_k(\cdot))(\xi)| \leq C |\xi|^{1-|\gamma|}. \quad (\text{D.0.9})$$

Se tiene

$$\begin{aligned} \|\nabla K(x)\|_{l^2} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial \mathcal{F}^{-1} m_k(x)}{\partial x_j} \right| = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^n |\mathcal{F}^{-1}(-i(\cdot)_j m_k(\cdot))(x)| \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^n \left| \int_{\Delta_k} e^{ix \cdot \xi} \xi_j m_k(\xi) d\xi \right|. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_k} e^{ix \cdot \xi} \xi_j m_k(\xi) d\xi &= \frac{1}{\sum_{|\gamma|=n+2} (ix)^\gamma} \int_{\Delta_k} \sum_{|\gamma|=n+2} (ix)^\gamma e^{ix \cdot \xi} \xi_j m_k(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\sum_{|\gamma|=n+2} (ix)^\gamma} \sum_{|\gamma|=n+2} \int_{\Delta_k} D^\gamma(e^{ix \cdot (\cdot)})(\xi) \xi_j m_k(\xi) d\xi \\ &= \frac{(-1)^{n+2}}{\sum_{|\gamma|=n+2} (ix)^\gamma} \sum_{|\gamma|=n+2} \int_{\Delta_k} e^{ix \cdot \xi} D^\gamma((\cdot)_j m_k(\cdot))(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

De este modo, por (D.0.9)

$$\left| \int_{\Delta_k} e^{ix \cdot \xi} \xi_j m_k(\xi) d\xi \right| \leq \frac{C}{\left| \sum_{|\gamma|=n+2} (ix)^\gamma \right|} \int_{\Delta_k} |\xi|^{-n-1} d\xi \leq C \frac{2^{-k}}{|x|^{n+2}}.$$

y también

$$\|\nabla K(x)\|_{l^2} \leq \frac{C}{|x|^{n+2}}.$$

Si  $|x| > 1$  ya tenemos que  $\|\nabla K(x)\|_{l^2} \leq \frac{C}{|x|^{n+1}}$ . Supongamos que  $0 < |x| \leq 1$ . Puesto que  $(0, 1] = \bigcup_{l \geq 1} (2^{-l-1}, 2^{-l+1}]$ , podemos escribir que  $|x| \sim 2^{-l}$  para algún  $l \geq 1$ .

Por un lado,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^l \sum_{j=1}^n \left| \int_{\Delta_k} e^{ix \cdot \xi} \xi_j m_k(\xi) d\xi \right| &\leq C \sum_{k=0}^l \sum_{j=1}^n \int_{\Delta_k} |\xi| \psi(2^{-k} \xi) d\xi \\ &\leq C \sum_{k=0}^l 2^k 2^{kn} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\eta) d\eta \\ &= C \sum_{k=0}^l 2^{k(n+1)} \leq C 2^{l(n+1)} \leq \frac{C}{|x|^{n+1}}. \end{aligned}$$

Por otro lado, usando que

$$\left| \int_{\Delta_k} e^{ix \cdot \xi} \xi_j m_k(\xi) d\xi \right| \leq C \frac{2^{-k}}{|x|^{n+2}},$$

tenemos

$$\sum_{k>l} \sum_{j=1}^n \left| \int_{\Delta_k} e^{ix \cdot \xi} \xi_j m_k(\xi) d\xi \right| \leq C \frac{2^{-l}}{|x|^{n+2}} \leq \frac{C}{|x|^{n+1}}.$$

El operador  $T$  manda  $L^2(\mathbb{R}^n)$  en  $L^2(l^2)$ :

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{L^2(l^2)}^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} 2^{2k\alpha} |\Lambda^{-\alpha} \psi_k(D) f(x)|^2 dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 2^{2k\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |\langle \xi \rangle^{-\alpha} \psi_k(\xi) \hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq C \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Delta_k} |\psi_k(\xi) \hat{f}(\xi)|^2 d\xi \leq C \|f\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

En virtud del teorema D.2  $T$  admite una extensión acotada de  $L^p(\mathbb{R}^n)$  en  $L^p(l^2)$  para todo  $p$  tal que  $1 < p < \infty$ . Queda entonces demostrada la estimación (D.0.5).

Nótese que considerando la desigualdad inversa en (D.0.4) para  $-\alpha$  también se obtiene

$$\left\| \left( \sum_{k \geq 0} 2^{-2k\alpha} |\psi_k(D) f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \leq C \|\Lambda^{-\alpha} f\|_{L^p}. \quad (\text{D.0.10})$$

Probar (D.0.4) es equivalente a demostrar que

$$\left\| \sum_{k \geq 0} f_k \right\|_{L^p} \leq C \left\| \left( \sum_{k \geq 0} 2^{2k\alpha} |\Lambda^{-\alpha} f_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p}.$$

Para una función  $g \in L^{p'}$  fija, y para cierto entero  $m$  que depende de  $B_0, B_1$  tal que  $\text{spt } \widehat{f}_k$  y el anillo  $\Delta_{k'}$  son disjuntos si  $|k - k'| > m$ , se tiene

$$\begin{aligned}
|\langle \sum_{k \geq 0} f_k, g \rangle| &= |\langle \sum_{k \geq 0} f_k, \sum_{l \geq 0} \psi_l(D)g \rangle| \\
&= |\sum_{|j| \leq m} \sum_{\substack{k \geq 0 \\ k \geq -j}}^{\infty} \langle f_k, \psi_{k+j}(D)g \rangle| \\
&= |\sum_{|j| \leq m} \sum_{\substack{k \geq 0 \\ k \geq -j}}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) \overline{\psi_{k+j}(D)g(x)} dx| \\
&= |\sum_{|j| \leq m} \sum_{\substack{k \geq 0 \\ k \geq -j}}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}_k(\xi) \overline{\psi_{k+j}(\xi) \widehat{g}(\xi)} d\xi| \\
&= |\sum_{|j| \leq m} \sum_{\substack{k \geq 0 \\ k \geq -j}}^{\infty} 2^{j\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} 2^{k\alpha} \langle \xi \rangle^{-\alpha} \widehat{f}_k(\xi) \overline{2^{-(k+j)\alpha} \langle \xi \rangle^{\alpha} \psi_{k+j}(\xi) \widehat{g}(\xi)} d\xi| \\
&= |\sum_{|j| \leq m} \sum_{\substack{k \geq 0 \\ k \geq -j}}^{\infty} 2^{j\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} 2^{k\alpha} \Lambda^{-\alpha} f_k(x) \overline{2^{-(k+j)\alpha} \Lambda^{\alpha} \psi_{k+j}(D)g(x)} dx| \\
&= |\sum_{|j| \leq m} 2^{j\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\substack{k \geq 0 \\ k \geq -j}}^{\infty} 2^{k\alpha} \Lambda^{-\alpha} f_k(x) \overline{2^{-(k+j)\alpha} \Lambda^{\alpha} \psi_{k+j}(D)g(x)} dx| \\
&\leq 2^{m\alpha} \sum_{|j| \leq m} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \sum_{k \geq 0}^{\infty} 2^{2k\alpha} |\Lambda^{-\alpha} f_k(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k \geq 0}^{\infty} 2^{-2k\alpha} |\Lambda^{\alpha} \psi_k(D)g(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx \\
&\leq C \left\| \left( \sum_{k \geq 0}^{\infty} 2^{2k\alpha} |\Lambda^{-\alpha} f_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \left\| \left( \sum_{k \geq 0}^{\infty} 2^{-2k\alpha} |\Lambda^{\alpha} \psi_k(D)g|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^{p'}} \\
&\leq C \left\| \left( \sum_{k \geq 0}^{\infty} 2^{2k\alpha} |\Lambda^{-\alpha} f_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}},
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se desprende de (D.0.10) en el caso  $f = \Lambda^{\alpha}g$ . Por todo ello y el teorema de Riesz,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k \geq 0} f_k \right\|_{L^p} &= \sup \left\{ \left| \langle \sum_{k \geq 0} f_k, g \rangle \right| : \|g\|_{L^{p'}} \leq 1 \right\} \\
&\leq C \left\| \left( \sum_{k \geq 0}^{\infty} 2^{2k\alpha} |\Lambda^{-\alpha} f_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

□

### Demostración del lema D.3

Si en la definición D.1 sustituimos la función  $\phi$  por  $\Phi$  dada por

$$\Phi(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{si } |\xi| \leq B, \\ 0, & \text{si } |\xi| \geq 2B, \end{cases}$$

y definimos  $\Psi, \Phi_k, \Psi_k$  de la misma manera a partir de  $\Phi$  como definíamos  $\psi, \phi_k, \psi_k$  a partir de  $\phi$ , en particular se tiene que  $\Phi_k(\xi) = 1$  si  $|\xi| \leq B 2^k$ , pudiéndose escribir

$$\widehat{f_k} = \Phi_k \widehat{f_k} = \sum_{j=0}^k \Psi_j \widehat{f_k},$$

y se cumple

$$f_k = \sum_{j=0}^k \Psi_j(D) f_k.$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^{\infty} f_k \right\|_{W^{\alpha,p}} &= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \Psi_l(D) f_k \right\|_{W^{\alpha,p}} \\ &= \left\| \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=l}^{\infty} \Psi_l(D) f_k \right\|_{W^{\alpha,p}} \\ &= \left\| \sum_{l=0}^{\infty} \Psi_l(D) \left[ \sum_{k=l}^{\infty} f_k \right] \right\|_{W^{\alpha,p}} \\ &\leq C \left\| (2^{2l\alpha} |\Psi_l(D)|^2 \left( \sum_{k=l}^{\infty} f_k \right)^2)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p}, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se desprende de la estimación (D.0.4) del lema D.2 aplicada a la sucesión

$$\left\{ \Psi_l(D) \left( \sum_{k=l}^{\infty} f_k \right) \right\}_{l \geq 0}.$$

Téngase en cuenta que los soportes son adecuados:

$$\text{spt } \mathcal{F}(\Psi_l(D) \left( \sum_{k=l}^{\infty} f_k \right)) \subset \text{spt } \mathcal{F}\Psi_l = \{ \xi : B 2^{l-1} \leq |\xi| \leq B 2^{l+1} \}.$$

Denotando  $\omega_k = 2^{k\alpha} f_k$ , queremos probar que

$$\left\| \left( \sum_{l=0}^{\infty} 2^{2l\alpha} |\Psi_l(D)|^2 \sum_{k=l}^{\infty} 2^{-k\alpha} |\omega_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \leq C \left\| \left( \sum_{k=0}^{\infty} |\omega_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p},$$

es decir, que el operador  $\tilde{T}$  definido sobre las sucesiones  $\{\omega_k\}_{k \geq 0} \in L^\infty(l^2)$  por

$$\tilde{T}(\{\omega_k\}_{k \geq 0}) := \{ 2^{l\alpha} \Psi_l(D) \sum_{k=l}^{\infty} 2^{-k\alpha} \omega_k \}_{l \geq 0}$$

admite una extensión acotada de  $L^p(l^2)$  en  $L^p(l^2)$ . Para cada  $l \geq 0$  se tiene

$$\begin{aligned} 2^{l\alpha} \Psi_l(D) \left( \sum_{k=l}^{\infty} 2^{-k\alpha} \omega_k \right)(x) &= 2^{l\alpha} (\mathcal{F}^{-1} \Psi_l) * \left( \sum_{k=l}^{\infty} 2^{-k\alpha} \omega_k \right)(x) \\ &= \sum_{k=l}^{\infty} 2^{\alpha(l-k)} (\mathcal{F}^{-1} \Psi_l * \omega_k)(x) \\ &= \left( \sum_{k=l}^{\infty} 2^{\alpha(l-k)} \mathcal{F}^{-1} \Psi_l \right) * \omega_k(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} K'(x-y) \cdot \{\omega_k(y)\}_{k \geq 0} dy, \end{aligned}$$

donde  $K'(x) = \{K'_{lk}(x)\}_{l,k \geq 0}$ , y

$$K'_{lk}(x) := \begin{cases} 2^{\alpha(l-k)} \mathcal{F}^{-1} \Psi_l(x), & \text{si } k \geq l, \\ 0, & \text{si } k < l. \end{cases}$$

Probaremos que  $\tilde{T}$  está acotado en  $L^2(l^2)$  y la condición

$$\|\nabla K'(x)\|_{\mathcal{L}(l^2, l^2)} \leq \frac{C}{|x|^{n+1}}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad (\text{D.0.11})$$

obteniendo por el teorema D.2 en el caso  $A = B = l^2$  el resultado deseado.

Para  $l \geq 0$  escribimos  $\Delta'_l := \{\xi : B 2^{l-1} \leq |\xi| \leq B 2^{l+1}\}$ . Por la propiedad de solapamiento finito de estos anillos y la identidad de Plancherel, se cumple

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}\{\omega_k\}_{k \geq 0}\|_{L^2(l^2)}^2 &= \left\| \left( \sum_{l=0}^{\infty} 2^{2l\alpha} |\Psi_l(D) \sum_{k=l}^{\infty} 2^{-k\alpha} \omega_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2}^2 \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} 2^{2l\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |\Psi_l(D) \left( \sum_{k=l}^{\infty} 2^{-k\alpha} \omega_k(x) \right)|^2 dx \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \int_{\Delta'_l} |\Psi_l(\xi) \left( \sum_{k=l}^{\infty} 2^{\alpha(l-k)} \widehat{\omega}_k(\xi) \right)|^2 d\xi \\ &\leq \sum_{l=0}^{\infty} \int_{\Delta'_l} |\Psi_l(\xi)|^2 \left( \sum_{k'=l}^{\infty} 2^{2\alpha(l-k')} \right) \left( \sum_{k=l}^{\infty} |\widehat{\omega}_k(\xi)|^2 \right) d\xi \\ &\leq C \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\omega}_k(\xi)|^2 d\xi \\ &= C \|\{\omega_k\}_{k \geq 0}\|_{L^2(l^2)}^2, \end{aligned}$$

donde resulta esencial que  $\alpha > 0$  para que la serie  $\sum_{k'=l}^{\infty} 2^{2\alpha(l-k')}$  esté acotada para cada  $l \geq 0$ .

De manera análoga al estudio del núcleo del operador  $T$  definido en (D.0.6) que hacíamos en la prueba del lema D.2, la condición (D.0.11) se puede explicar como consecuencia de la siguiente propiedad de decaimiento de las derivadas del multiplicador de  $\tilde{T}$ :

$$\sum_{k=0}^{\infty} |D^\alpha m_{lk}(\xi)| \leq C |\xi|^{-|\alpha|}, \quad (\text{D.0.12})$$

donde  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ,  $l \geq 0$ , y  $m_{lk}(\xi) := \widehat{K}'_{lk}(\xi)$ . Sabemos que

$$m_{lk}(\xi) = \begin{cases} 2^{\alpha(l-k)} \Psi_l(\xi), & \text{si } k \geq l \geq 0, \\ 0, & \text{si } l > k \geq 0. \end{cases}$$

Si  $k \geq l$ :

$$D^\gamma m_{lk}(\xi) = 2^{\alpha(l-k)} D^\gamma \Psi_l(\xi) = 2^{\alpha(l-k)} 2^{-l|\gamma|} D^\gamma \Psi(2^{-l}\xi).$$

Supongamos que  $\xi \in \Delta'_l = \text{spt } \Psi_l$ . Entonces, sabiendo que  $\Psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$|D^\gamma m_{lk}(\xi)| \leq C 2^{-\alpha k} |\xi|^{\alpha-|\gamma|} |(D^\gamma \Psi)(2^{-l}\xi)| \leq C 2^{-\alpha k} |\xi|^{\alpha-|\gamma|}.$$

Recordando además que  $\alpha > 0$ , se deduce (D.0.12):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} |D^\gamma m_{lk}(\xi)| &= \sum_{k=l}^{\infty} |D^\gamma m_{lk}(\xi)| \leq C |\xi|^{\alpha-|\gamma|} \sum_{k \geq l} 2^{-\alpha k} \\ &\leq C 2^{-\alpha} |\xi|^{\alpha-|\gamma|} \leq C |\xi|^{-|\gamma|}. \end{aligned}$$

Se cumple  $\|\nabla K'(x)\|_{\mathcal{L}(l^2, l^2)} = \|\nabla K'(x)\|_{l^2} \leq \|\nabla K'(x)\|_{l^1}$  y también

$$\begin{aligned} \|\nabla K'(x)\|_{l^1} &\leq \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial \mathcal{F}^{-1} m_{lk}(x)}{\partial x_j} \right| = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^n |\mathcal{F}^{-1}(-i(\cdot)_j m_{lk}(\cdot))(x)| \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^n \left| \int_{\Delta'_l} e^{ix \cdot \xi} \xi_j m_{lk}(\xi) d\xi \right|. \end{aligned}$$

Para cada  $l, k \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Delta'_l} e^{ix \cdot \xi} \xi_j m_{lk}(\xi) d\xi &= \frac{1}{\sum_{|\gamma|=n+2} (ix)^\gamma} \int_{\Delta'_l} \sum_{|\gamma|=n+2} (ix)^\gamma e^{ix \cdot \xi} \xi_j m_{lk}(\xi) d\xi \\ &= \frac{(-1)^n}{\sum_{|\gamma|=n+2} (ix)^\gamma} \sum_{|\gamma|=n+2} \int_{\Delta'_l} e^{ix \cdot \xi} D^\gamma((\cdot)_j m_{lk}(\cdot))(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \|\nabla K'(x)\|_{l^1} &\leq \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^n \frac{C}{|x|^{n+2}} \int_{\Delta'_l} \sum_{|\gamma|=n+2} |D^\gamma((\cdot)_j m_{lk}(\cdot))(\xi)| d\xi \\ &\leq \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=1}^n \frac{C}{|x|^{n+2}} \int_{\Delta'_l} \sum_{|\gamma|=n+2} \sum_{k=0}^{\infty} |D^\gamma((\cdot)_j m_{lk}(\cdot))(\xi)| d\xi. \end{aligned} \quad (\text{D.0.13})$$

De (D.0.12) se deduce  $\sum_{k=0}^{\infty} |D^\gamma((\cdot)_j m_{lk}(\cdot))(\xi)| \leq C |\xi|^{1-|\gamma|}$ , acotándose (D.0.13) por

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{C}{|x|^{n+2}} \int_{\Delta'_l} |\xi|^{-n-1} d\xi \leq C \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2^{-l}}{|x|^{n+2}} = \frac{C}{|x|^{n+2}}.$$



Hemos visto pues

$$\|\nabla K'(x)\|_{l^1} \leq \frac{C}{|x|^{n+2}}.$$

Siguiendo las mismas líneas de demostración que en el lema D.2 para obtener la estimación  $\|\nabla K(x)\|_{l^1} \leq \frac{C}{|x|^{n+1}}$ , donde el núcleo  $K$  se define en (D.0.7), separando los casos  $|x| > 1$  y  $0 < |x| \leq 1$  se llega a

$$\|\nabla K'(x)\|_{l^1} \leq \frac{C}{|x|^{n+1}}.$$

□

Seguidamente presentamos la demostración de la proposición D.1 siguiendo las líneas indicadas en el capítulo II de la referencia [T2].

### Demostración de la proposición D.1

Vamos a expresar el producto  $fg$  en términos de los paraproductos de Bony. Se cumple

$$\begin{aligned} \widehat{fg} &= \widehat{f} * \widehat{g} = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \widehat{f} \right) * \left( \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \widehat{g} \right) = \sum_{j,k \geq 0} (\psi_k \widehat{f}) * (\psi_j \widehat{g}) \\ &= \sum_{k \geq 5} (\psi_0 \widehat{f} + \psi_1 \widehat{f} + \dots + \psi_{k-5} \widehat{f}) * \psi_{k+1} \widehat{g} \\ &\quad + \sum_{k \geq 5} (\psi_0 \widehat{g} + \psi_1 \widehat{g} + \dots + \psi_{k-5} \widehat{g}) * \psi_{k+1} \widehat{f} \\ &\quad + \sum_{|j-k| \leq 5} (\psi_j \widehat{f}) * (\psi_k \widehat{g}) \\ &= \sum_{k \geq 5} (\phi_{k-5} \widehat{f}) * (\psi_{k+1} \widehat{g}) + \sum_{k \geq 5} (\phi_{k-5} \widehat{g}) * (\psi_{k+1} \widehat{f}) \\ &\quad + \sum_{|j-k| \leq 5} (\psi_j \widehat{f}) * (\psi_k \widehat{g}) \\ &= \sum_{k \geq 5} \mathcal{F}(\phi_{k-5}(D)f) * \mathcal{F}(\psi_{k+1}(D)g) + \sum_{k \geq 5} \mathcal{F}(\phi_{k-5}(D)g) * \mathcal{F}(\psi_{k+1}(D)f) \\ &\quad + \sum_{|j-k| \leq 5} \mathcal{F}(\psi_j(D)f) * \mathcal{F}(\psi_k(D)g) \\ &= \mathcal{F} \left( \sum_{k \geq 5} \phi_{k-5}(D)f \psi_{k+1}(D)g + \sum_{k \geq 5} \phi_{k-5}(D)g \psi_{k+1}(D)f \right. \\ &\quad \left. + \sum_{|j-k| \leq 5} \psi_j(D)f \psi_k(D)g \right). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$fg = T_f g + T_g f + R(f, g),$$

donde  $T_f g$  se define en (D.0.3) y el término del resto viene dado por

$$R(f, g) := \sum_{|j-k| \leq 5} \psi_j(D)f \psi_k(D)g.$$

Basta que demostremos

$$\begin{aligned} \|T_f g\|_{W^{\alpha,p}} &\leq C \|f\|_{L^{q_1}} \|g\|_{W^{\alpha,q_2}}, \\ \|R(f, g)\|_{W^{\alpha,p}} &\leq C \|f\|_{L^{q_1}} \|g\|_{W^{\alpha,q_2}}. \end{aligned}$$

La transformada de Fourier del producto  $\phi_k(D)f \psi_{k+6}(D)g$  está soportada en un anillo diádico:

$$\begin{aligned} \text{spt } \mathcal{F}(\phi_k(D)f \psi_{k+6}(D)g) &= \text{spt } [\mathcal{F}(\phi_k(D)f) * \mathcal{F}(\psi_{k+6}(D)g)] \\ &\subset \text{spt } \mathcal{F}(\phi_k(D)f) + \text{spt } \mathcal{F}(\psi_{k+6}(D)g) \\ &\subset \text{spt } \phi_k + \text{spt } \psi_{k+6} \\ &\subset \{\xi : 60 \cdot 2^{k-1} \leq |\xi| \leq 65 \cdot 2^{k+1}\}. \end{aligned}$$

Por la desigualdad (D.0.4) del lema D.2 en el caso  $f_k = \phi_k(D)f \psi_{k+6}(D)g$ , se cumple

$$\|T_f g\|_{W^{\alpha,p}} = \left\| \sum_{k \geq 0} \phi_k(D)f \psi_{k+6}(D)g \right\|_{W^{\alpha,p}} \leq C \left\| \left( \sum_{k \geq 0} 2^{2k\alpha} |\phi_k(D)f \psi_{k+6}(D)g|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p}.$$

Se verifica

$$\begin{aligned} |\phi_k(D)f(x)| &= |\mathcal{F}^{-1}\phi_k * f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}^{-1}\phi_k(x-y) f(y)| dy \\ &\leq C 2^{kn} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{1 + |2^k(x-y)|^{n+1}} dy \end{aligned} \tag{D.0.14}$$

$$\begin{aligned} &= C \left[ \frac{2^{kn}}{1 + |2^k(\cdot)|^{n+1}} * f \right] (x) \\ &\leq C \left\| \frac{2^{kn}}{1 + |2^k(\cdot)|^{n+1}} \right\|_{L^1} Mf(x) \\ &= C \left\| \frac{1}{1 + |\cdot|^{n+1}} \right\|_{L^1} Mf(x), \end{aligned} \tag{D.0.15}$$

donde la desigualdad en (D.0.14) se deduce de que por ser  $\phi$  función de Schwartz, para todo  $z \in \mathbb{R}$ :

$$|\mathcal{F}^{-1}\phi_k(z)| = 2^{kn} |\mathcal{F}^{-1}\phi(2^k z)| \leq C \frac{2^{kn}}{1 + |2^k z|^{n+1}},$$

y el lema B.3 explica la desigualdad en (D.0.15). Hemos probado la estimación puntual

$$|\phi_k(D)f(x)| \leq C Mf(x), \quad \text{c.t. } x \in \mathbb{R}^n. \tag{D.0.16}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \|T_f g\|_{W^{\alpha,p}} &\leq C \left\| Mf \left( \sum_{k \geq 0} 2^{2k\alpha} |\psi_{k+6}(D)g|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \\ &\leq C \|Mf\|_{L^{q_1}} \left\| \left( \sum_{k \geq 0} 2^{2k\alpha} |\psi_{k+6}(D)g|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^{q_2}} \end{aligned}$$

$$\leq C \|Mf\|_{L^{q_1}} \left\| \left( \sum_{k \geq 0} 2^{2k\alpha} |\psi_k(D)g|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^{q_2}} \quad (\text{D.0.17})$$

$$\leq C \|f\|_{L^{q_1}} \|g\|_{W^{\alpha, q_2}}, \quad (\text{D.0.18})$$

donde la desigualdad recíproca de (D.0.4) en el lema D.2 explica la última desigualdad.

Teniendo presente la notación  $\phi_k \equiv 0$  si  $k \leq -1$ , se verifica

$$\sum_{|j-k| \leq 5} \psi_j(D)f \psi_k(D)g = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(D)g (\phi_{k+5}(D) - \phi_{k-6}(D))f.$$

La transformada de Fourier de  $\psi_k(D)g (\phi_{k+5}(D) - \phi_{k-6}(D))f$  está soportada en una bola diádica:

$$\begin{aligned} \text{spt } \mathcal{F}(\psi_k(D)g (\phi_{k+5}(D) - \phi_{k-6}(D))f) &= \text{spt } [\mathcal{F}(\psi_k(D)g) * \mathcal{F}((\phi_{k+5}(D) - \phi_{k-6}(D))f)] \\ &\subset \text{spt } \mathcal{F}(\psi_k(D)g) + \text{spt } \mathcal{F}((\phi_{k+5}(D) - \phi_{k-6}(D))f) \\ &\subset \text{spt } \psi_k + \text{spt } (\phi_{k+5} - \phi_{k-6}) \\ &\subset B(0, 66 \cdot 2^k). \end{aligned}$$

Por el lema D.3 en el caso  $f_k = \psi_k(D)g (\phi_{k+5}(D) - \phi_{k-6}(D))f$ , y aplicando la estimación (D.0.16), se cumple

$$\begin{aligned} \|R(f, g)\|_{W^{\alpha, p}} &= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(D)g (\phi_{k+5}(D) - \phi_{k-6}(D))f \right\|_{W^{\alpha, p}} \\ &\leq C \left\| \left( \sum_{k=0}^{\infty} 2^{2k\alpha} |\psi_k(D)g (\phi_{k+5}(D) - \phi_{k-6}(D))f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \\ &\leq C \left\| Mf \left( \sum_{k=0}^{\infty} 2^{2k\alpha} |\psi_k(D)g|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p}, \end{aligned}$$

y terminamos aplicando la desigualdad de Hölder y procediendo de la misma forma que en (D.0.17)-(D.0.18).

□

# Bibliografia

- [A] AGMON, S. *Spectral properties of Schrödinger operators and scattering theory*. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Serie IV. Vol. II(2), pp. 151-218 (1975).
- [AH] AGMON, S.; HÖRMANDER, L. *Asymptotic properties of solutions of differential equations with simple characteristics*. Journal d'Analyse Mathématique. Vol. 30 (1976).
- [BL] BERGH, J.; LÖFSTRÖM, J. *Interpolation Spaces. An Introduction*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1976).
- [B] BEYLKIN, G. *Imaging of discontinuities in the inverse scattering problem by inversion of a casual generalized Radon transform*. Journal of Mathematical Physics. Vol. 26, pp. 99-108 (1985).
- [C] CALDERÓN, A.P. *Intermediate spaces and interpolation, the complex method*. Studia Mathematica. Vol. 24, pp. 113-190 (1964).
- [CW] CHRIST, F.M.; WEINSTEIN, M.I. *Dispersion of small amplitude solutions of the generalized Korteweg-de Vries equation*. Journal of Functional Analysis. Vol. 100, pp. 87-109 (1991).
- [CK1] COLTON, D.; KRESS, R. *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. John Wiley & Sons. New York (1983).
- [CK2] COLTON, D.; KRESS, R. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1998).
- [D] DUOANDIKOETXEA, J. *Fourier Analysis*. Graduate Studies in Mathematics (29). American Mathematical Society. Providence (2000).
- [ER1] ESKIN, G.; RALSTON, J. *The inverse backscattering problem in 3 dimension*. Communications in Mathematical Physics. Vol. 124, pp. 169-215 (1989).
- [ER2] ESKIN, G.; RALSTON, J. *Inverse backscattering in two dimensions*. Communications in Mathematical Physics. Vol. 138, pp. 451-486 (1991).

- [ER3] ESKIN, G.; RALSTON, J. *Inverse backscattering*. Journal d'Analyse Mathématique. Vol. 58, pp. 177-190 (1992).
- [GS] GEL'FAND, I.M.; SHILOV, G.E. *Generalized Functions I*. Academic Press Inc. New York (1964).
- [Gr] GRAFAKOS, L. *Classical and Modern Fourier Analysis*. Pearson Education Inc. Upper Saddle River, New Jersey (2004).
- [GU] GREENLEAF, A.; UHLMANN, G. *Recovery of singularities of a potential from singularities of the scattering data*. Communications in Mathematical Physics. Vol. 157, pp. 549-572 (1993).
- [G] GRISVARD, P. *Elliptic problems in nonsmooth domains*. Pitman Boston (1985).
- [H] HAJLASZ, P. *Sobolev spaces on an arbitrary metric space*. Potential Analysis. Vol. 5, n. 4, pp. 403-415 (1996).
- [JK] JERISON, D.; KENIG, C.E. *Unique continuation and absence of positive eigenvalues for Schrödinger operators*. The Annals of Mathematics. Vol. 121, n. 3, pp. 463-488 (1985).
- [KPV1] KENIG, C.E.; PONCE, G.; VEGA, L. *Small solutions to nonlinear Schrödinger equations*. Annales de l'Institut Henri Poincaré (C). Analyse non linéaire. Vol. 10, n. 3, pp. 255-288 (1993).
- [KPV2] KENIG, C.E.; PONCE, G.; VEGA, L. *Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle*. Communications on Pure and Applied Mathematics. Vol. 46, pp. 527-620 (1993).
- [KRS] KENIG, C.E.; RUIZ, A.; SOGGE, C.D. *Uniform Sobolev inequalities and unique continuation for second order constant coefficients differential operators*. Duke Mathematical Journal. Vol. 55, pp. 329-347 (1987).
- [L] LAGERGREN, R. *Backscattering in three dimensions*. Ph. D.Thesis. Lund University (2001).
- [Na] NACHMAN, A. *Inverse scattering at fixed energy*. Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Physics. Leipzig. Springer Verlag, pp. 434-441 (1992).
- [No] NOVIKOV, R.G. *Multidimensional inverse spectral problem for the equation  $-\Delta\Psi + (v(x) - Eu(x))\Psi = 0$* . Functional Analysis and Its Applications. Vol. 22, n. 4, pp. 263-272 (1988).

- [OPS] OLA, P.; PÄIVÄRINTA, L.; SEROV, V. *Recovering singularities from backscattering in two dimensions*. Communications in Partial Differential Equations. Vol. 26, pp. 697-715 (2001).
- [P] PROSSER, R.T. *Formal solutions of inverse scattering problems*. Journal of Mathematical Physics. Vol. 23, pp. 2127-2130 (1982).
- [PSe] PÄIVÄRINTA, L.; SEROV, V. *Recovery of singularities of a multidimensional scattering potential*. Journal on Mathematical Analysis. Vol. 29 (3), pp. 697-711 (1998).
- [PSS] PÄIVÄRINTA, L.; SEROV, V.S.; SOMERSALO, E. *Reconstruction of singularities of a scattering potential in two dimensions*. Advances in Applied Mathematics. Vol. 15 (1), pp. 97-113 (1994).
- [PSo] PÄIVÄRINTA, L.; SOMERSALO, E. *Inversion of discontinuities for the Schrödinger equation in three dimensions*. Journal on Mathematical Analysis. Vol. 22 (2), pp. 480-499 (1991).
- [R] RAMM, A.G. *Recovery of a potential from fixed-energy scattering data*. Inverse Problems. Vol. 4, pp. 877-886 (1988).
- [Re] REYES, J.M. *Inverse backscattering for the Schrödinger equation in 2D*. Inverse Problems. Vol. 23, pp.625-643 (2007).
- [Ru1] RUIZ, A. *Recovery of the singularities of a potential from fixed angle scattering data*. Communications in Partial Differential Equations. Vol. 26 (9,10), pp. 1721-1738 (2001).
- [Ru2] RUIZ, A. *Harmonic Analysis and Inverse Problems*. Notes of the 4th Summer School in Inverse Problems, Oulu, Finland (2002):  
<http://www.uam.es/gruposinv/inversos/publicaciones/Inverseproblems.pdf>.
- [RV] RUIZ, A.; VARGAS, A. *Partial recovery of a potential from backscattering data*. Communications in Partial Differential Equations. Vol. 30, no. 1-3, pp. 67-96 (2005).
- [RVe] RUIZ, A.; VEGA, L. *On local regularity of Schrödinger equations*. International Mathematics Research Notices. Vol. 1, pp. 13-27 (1993).
- [S] STEFANOV, P. *Generic uniqueness for two inverse problems in potential scattering*. Communications in Partial Differential Equations. Vol. 17, pp. 55-68 (1992).
- [SU1] SUN, Z.; UHLMANN, G. *Recovery of singularities for formally determined inverse problems*. Communications in Mathematical Physics. Vol. 153, pp. 431-445 (1993).

- [SU2] SUN, Z.; UHLMANN, G. *Generic uniqueness for an inverse boundary value problem*. Duke Mathematical Journal. Vol. 62, n. 1, pp. 131-155 (1991).
- [T1] TAYLOR, M.E. *Pseudodifferential operators and nonlinear PDE*. Progress in Mathematics. Birkhäuser (1991).
- [T2] TAYLOR, M.E. *Tools for PDE. Pseudodifferential operators, Paradifferential Operators and Layer Potentials*. American Mathematical Society. Providence (2000).
- [U] UHLMANN, G. *A time-dependent approach to the inverse backscattering problem*. Special issue to celebrate Pierre Sabatier's 65th birthday (Montpellier, 2000). Inverse Problems. Vol. 17, n. 4, pp. 703-716 (2001).
- [W] WATSON, G.N. *The Theory of Bessel Functions*. Cambridge University Press. New York (1948).

## Índice de Notación

En la siguiente tabla resumimos algunas notaciones usadas en este trabajo.

$\mathcal{F}$	transformada de Fourier
$\mathcal{F}^{-1}$	transformada inversa de Fourier
$B(x, r)$	bola de centro $x \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$ en $\mathbb{R}^n$
$B_r$	bola centrada en el origen de radio $r > 0$ en $\mathbb{R}^n$
$S(x, r)$	esfera de centro $x \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$ en $\mathbb{R}^n$
$S^{n-1}$	esfera unitaria $S(0, 1)$ de $\mathbb{R}^n$
$\mathcal{L}^n$	medida de Lebesgue $n$ -dimensional
$\sigma$	medida de Hausdorff $(n-1)$ -dimensional en $\mathbb{R}^n$
$\sigma_k$	medida inducida por $\mathcal{L}^n$ sobre la esfera $S(0, k)$ , con $k > 0$
$\omega_{n-1}$	medida de la esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$ : $\sigma(S^{n-1})$
$\text{spt } f$	soporte de una función $f$
$\langle \xi \rangle$	$(1 +  \xi ^2)^{\frac{1}{2}}$
$D^\alpha$	$\mathcal{F}^{-1} \xi ^\alpha \mathcal{F}$ , con $\alpha \in \mathbb{R}$
$\Lambda^\alpha$	derivada fraccionaria de orden $\alpha$ : $\mathcal{F}^{-1}\langle \xi \rangle^\alpha \mathcal{F}$ , con $\alpha \in \mathbb{R}$
$\phi(D)$	$\mathcal{F}^{-1}\phi(\xi)\mathcal{F}$ , para una función $\phi(\xi)$
$\mathcal{P}$	conjunto de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{C}$ y $n$ variables reales
$p'$	exponente conjugado de $p$ que verifica $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ , con $1 \leq p \leq +\infty$
$\ f\ _{L^p(w)}$	norma en $L^p$ con peso dada por $(\int_{\mathbb{R}^n}  f(x) ^p w(x) dx)^{\frac{1}{p}}$
$\ f\ _{L^p_\delta}$	norma en $L^p$ con peso dada por $(\int_{\mathbb{R}^n}  f(x) ^p (1 +  x )^{\delta p} dx)^{\frac{1}{p}}$
$L^\infty_0$	clase de las funciones esencialmente acotadas de soporte compacto
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	clase de Schwartz en $\mathbb{R}^n$
$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$	clase de las distribuciones temperadas en $\mathbb{R}^n$
$W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$	espacio de Sobolev $\{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \Lambda^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n)\}$
$\dot{W}^{\alpha,2}(\mathbb{R}^n)$	espacio de Sobolev homogéneo $\{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : D^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$
$W^{\alpha,p}_\delta$	espacio de Sobolev con peso $\{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \ \Lambda^\alpha f\ _{L^p_\delta} < +\infty\}$
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	producto escalar en $L^2(\mathbb{R}^n)$ : $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx$
$\Delta_k$	anillo diádico $\{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{k-1} \leq  \xi  \leq 2^{k+1}\}$ , con $k \in \mathbb{Z}$
$ x  \sim 2^{-k} \eta $	$2^{-k-1} \eta  <  x  \leq 2^{-k+1} \eta $ , donde $x, \eta \in \mathbb{R}^n$ , $k \in \mathbb{Z}$
$M$	operador maximal de Hardy-Littlewood
$\Gamma(\eta)$	$\left\{x \in \mathbb{R}^n : \left x - \frac{\eta}{2}\right  = \frac{ \eta }{2}\right\}$ , donde $\eta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
$\Lambda(\xi)$	$\{x \in \mathbb{R}^n : \xi \cdot (x - \xi) = 0\}$ , donde $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
$\Gamma(\eta)^3$	$\Gamma(\eta) \times \Gamma(\eta) \times \Gamma(\eta)$
$\chi$	función característica del conjunto $\{\eta \in \mathbb{R}^n :  \eta  \geq 10\}$
$\chi^*$	función característica del complementario de la bola $B_{C_0}$ , con $C_0 > 0$
$\chi_{(a,\infty)}$	función característica del intervalo real $(a, \infty)$ , donde $a \in \mathbb{R}$



$Q_j^*(q)(k, \theta, \omega)$	término $j$ -ésimo de la serie de Neumann-Born para datos globales de <i>scattering</i>
$R_m^*(k, \theta, \omega)$	resto de la serie de Neumann-Born para datos globales de <i>scattering</i>
$Q_j(q)$	término $j$ -ésimo de la serie de Neumann-Born para datos de <i>backscattering</i>
$R_m$	resto de la serie de Neumann-Born para datos de <i>backscattering</i>
$\tilde{Q}_j(q)$	$(\mathcal{F}^{-1} \chi^* \mathcal{F}) Q_j(q)$
$\tilde{Q}_j(q_1, \dots, q_j)$	$(\mathcal{F}^{-1} \chi^* \mathcal{F}) Q_j(q_1, \dots, q_j)$
$R_+(k^2)$	resolvente saliente del laplaciano
$R_\theta(k^2)(f)(x)$	$e^{-ik\theta \cdot x} R_+(k^2)(e^{ik\theta \cdot (\cdot)} f(\cdot))(x)$ , $x \in \mathbb{R}^n$
$u_\infty(k, \theta, \omega)$	amplitud de <i>scattering</i> o campo lejano con número de onda $k$ , dirección incidente $\theta$ y dirección saliente $\omega$
$q_b$	aproximación de Born del potencial para la amplitud de <i>scattering</i>
$q_B$	aproximación de Born del potencial para datos de <i>backscattering</i>
$q_B^\theta$	primera aproximación de Born del potencial para datos de ángulo fijo $\theta$
$q_{B,2}^\theta$	segunda aproximación de Born del potencial para datos de ángulo fijo $\theta$
$S_k$	grupo de las permutaciones de orden $k \in \mathbb{N}$

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID



540668317X